MPSI 15-16 Feuille n° 13 : Analyse asymptotique, DL

Du 14/12/15 au 06/01/16

Exercice 1. Déterminer les limites des suites de termes généraux :

1. $\dfrac{2^n + n^{10}}{3^n - n^{100}}$
2. $n\left(\dfrac{n}{2n-1}\right)^n$
3. $\dfrac{\sin(n)}{n}$
4. $\dfrac{\sin\left(\frac{3}{n}\right)\,\sin\left(\frac{5}{n}\right)}{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n^3}\right)^2}$
5. $\dfrac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}$
6. $\dfrac{n^2+\ln(n^n)}{\sqrt{(\ln(n))^n}}$
7. $\left(\dfrac{\ln(1+n)}{\ln(n)}\right)^{n\ln(n)}$
8. $\left(\dfrac{n^2+5n+4}{n^2-3n+7}\right)^n$
9. $\dfrac{3^n-2^n}{3^n+2^n}$
10. $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$
11. $2n+(-1)^n\,n^2\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
12. $\left(1+\dfrac{1}{2}\sin(n)\right)^{\frac{1}{n}}$
13. $\dfrac{n^n+n!}{(n+1)^n+n^n}$
14. $\sqrt[3]{\dfrac{2}{n^4}+\dfrac{1}{n^3}}\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)$
15. $\dfrac{n+(-1)^n}{n-(-1)^n}$
16. $\sqrt[n]{n^2}$
17. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k}$
18. $\sqrt[n]{\lfloor a^n\rfloor}$ où $a>0$

Exercice 2. Déterminer un équivalent simple de u_n :

1. $u_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}$
2. $u_n=\dfrac{1}{n-1}-\dfrac{1}{n+1}$
3. $u_n=n\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
4. $u_n=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{n}\right)$
5. $u_n=\ln(n+1)-\ln(n)$
6. $u_n=\left(\tan\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{1}{n}\right)\right)^n$

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n\sim v_n$. A-t-on :

1. $e^{u_n}\sim e^{v_n}$
2. $(u_n)^n\sim(v_n)^n$
3. $\ln|u_n|\sim\ln|v_n|$
4. $\sin(u_n)^n\sim\sin(v_n)^n$
5. $\sqrt{u_n}\sim\sqrt{v_n}$
6. $(u_n)^{\frac{1}{n}}\sim(v_n)^{\frac{1}{n}}$

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^{\mathbb{N}}$ telles que $u_n=\circ(v_n)$. A-t-on :

1. $e^{u_n}=\circ\left(e^{v_n}\right)$
2. $(u_n)^n=\circ\left((v_n)^n\right)$
3. $\ln|u_n|=\circ(\ln|v_n|)$
4. $\sin(u_n)^n=\circ\left(\sin(v_n)^n\right)$
5. $\sqrt{u_n}=\circ\left(\sqrt{v_n}\right)$
6. $(u_n)^{\frac{1}{n}}=\circ\left((v_n)^{\frac{1}{n}}\right)$

Exercice 5.

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^3}{x-1}\times2^{\frac{1}{x(1-x)}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{e^{\tan(x)}-e^{\sin(x)}}{\tan(x)-\sin(x)}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\tan(x)\times e^{\frac{1}{1-\cos(x)}}$
4. $\displaystyle\lim_{|x|\to+\infty}\frac{a^x+x^2}{2^x+(\ln|x|)^3}$

Exercice 6.

1. $\displaystyle\lim_{x\to2^-}\frac{x-2}{\sqrt{2-x}}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{x^3-8}{x-2}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{x^4+2x^2+3x}{2x^2-x}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-4}}{\sqrt[3]{x^2+1}}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$
6. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$
7. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{\log_a x-\log_x a}$
8. $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{\sqrt[m]{x}-\sqrt[m]{a}}{x-a}$
9. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(x-1-\sqrt{x^2-2x+2}\right)$

Exercice 7.

1. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)^x-1}{x^x-x}$
2. $\displaystyle\lim_{x\to1}\left(2^x+3^x-5\right)^{\tan\frac{\pi x}{2}}$
3. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1}{\sin^2x}-\frac{1}{x^2}$
4. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^{\left(\frac{1}{1+2\ln x}\right)}$
5. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$
6. $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{1+2\cos^3x-3\sqrt{\cos2x}}{\sin^4x}$

Exercice 8. Donner un DL aux points et ordres voulus :

1. $\dfrac{x^2}{\sin^2 x}$ en 0 ordre 5
2. $(\operatorname{ch} x)^{(1+\sin x)}$ en 0 ordre 3
3. $e^{\cos x}$ en 0 ordre 7
4. $\sin x \ \operatorname{sh}^2 x$ en 0 ordre 5
5. $\sqrt{1-\sqrt{1-x^2}}$ en 0 ordre 4
6. $\dfrac{\ln x}{x^2}$ en 1 ordre 4
7. $\arctan \sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ en $+\infty$ ordre 3
8. $e^x - \sqrt{1+2x}$ en 0 ordre 5

Exercice 9. En utilisant des DL, donner les positions relatives au voisinage de 0 des courbes de :
$f_1(x) = e^{\sin x}$, $f_2(x) = e^{\frac{x}{\cos x}}$, $f_3(x) = 3 - 2\left(1+x^3\right)\sqrt{1-x}$ et $f_4(x) = \dfrac{x}{\sin x} + x$

Exercice 10. Calculer un équivalent simple des expressions suivantes :

1. $\sqrt{x+\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ en $+\infty$
2. $\sqrt{x^2+2x+3} - (ax+b)$ en $+\infty$
3. $\dfrac{1}{\cos x} - \tan x$ en $\dfrac{\pi}{2}$
4. $\dfrac{1-\sin x+\cos x}{\sin x+\cos x-1}$ en $\dfrac{\pi}{2}$
5. $\dfrac{x^3+1-\cos x}{(x^2-2x)\tan(3x)}$ en 0
6. $\dfrac{\tan x - \sin x}{e^x - \cos x}$ en 0
7. $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ en $+\infty$
8. $\sqrt[4]{x^4+1} - x$ en $+\infty$
9. $\dfrac{\sin x - x\cos x}{e^{\cos x} - e}$ en 0
10. $\cos\left(\dfrac{1}{x}\right) + x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$
11. $\dfrac{\ln(\cos 3x)}{\sin^2(2x)}$ en 0
12. $\dfrac{(1-e^x)\sin x}{x^2+x^3}$ en 0

Exercice 11. Montrer que la fonction $x \to (1+x)^{\frac{1}{x}}$ se prolonge par continuité en 0 et écrire son $\mathrm{DL}_3(0)$.

Exercice 12.
1. $\mathrm{DL}_5(0) : \sin^2 x$
2. DL_5 en $\dfrac{\pi}{6}$ de $\sin x$
3. DL_3 en 0 de $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+x}}$
4. DL_1 en 1 de $(1+\ln x)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$
5. DL_n en 0 de $\cos^3 x$
6. DLG_3 en 0 de $\dfrac{\ln(1+\cos x)}{\tan x}$
7. DL_2 $\left(\text{en } \dfrac{1}{x}\right)$ en $+\infty$ de $\sqrt[3]{x^3+x^2} - \sqrt[3]{x^3-x^2}$

Exercice 13. Etudier les branches infinies de $x \to \dfrac{x^2}{x+4} \arcsin\sqrt{\dfrac{x}{2x+6}}$

Exercice 14.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in \left]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[\,\Big|\, |x_n \sin x_n| = 1$
2. Développement asymptotique de x_n à la précision $\dfrac{1}{n^2}$

Exercice 15.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geqslant 2, \exists! x_n \in]n+1, n+2[\,\Big|\, (x_n - n)\ln(n) = x_n \ln(x_n - n)$
2. Montrer que $x_n - n - 1 \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$

Exercice 16.
1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists! x_n \in \left]n\pi, n\pi + \dfrac{\pi}{2}\right[\,\Big|\, \tan(x_n) = x_n$
2. Développement asymptotique de x_n à la précision $\dfrac{1}{n^2}$ quand n tend vers $+\infty$

Exercice 17. Comportement en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Exercice 18. Comportement en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction définie par $f(x) = \dfrac{3}{5}x + \dfrac{4}{5}\sqrt{|4-x^2|}$

Exercice 19. Comportement en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction définie par $f(x) = x^2 \arctan\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$

Exercice 20. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(0) = 1$ et, si $x \neq 0$, $f(x) = (\operatorname{ch} x)^{\frac{1}{x}}$ Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Etudier les variations de f. Tracer son graphe en précisant la position relative du graphe et de la tangente au point d'abscisse 0.