Devoir en temps libre n° 9

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

Problème : Étude de la dérivée énième de la fonction arctangente

On rappelle qu'une fonction est un polynôme (ou une fonction polynomiale) de degré $n \in \mathbb{N}$ si c'est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ avec $(a_n, \ldots, a_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $a_n \neq 0$.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(x)$

Partie I

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}$ et qu'il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.
   Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et P_n'.
2. (a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, il existe un polynôme Q_n de degré inférieur ou égal à $n-2$ tel que : $\forall x \in \mathbb{R},\ P_n(x) = (-1)^{n-1} n!\, x^{n-1} + Q_n(x)$.
   En déduire le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n pour $n \geqslant 2$ entier naturel.
   (b) Soit $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \left(1+x^2\right) f''(x) + 2x f'(x)$.
   Calculer $h(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En calculant $h^{(n)}$ de deux manières différentes, montrer que :
   $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(1+x^2\right) f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)\, f^{(n+1)}(x) + n(n+1) f^{(n)}(x) = 0$
   (d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ P_{n+2}(x) + 2(n+1)x P_{n+1}(x) + n(n+1)\left(1+x^2\right) P_n(x) = 0$
3. En utilisant les relations établies en 1 et 2d, montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ \left(1+x^2\right) P_n''(x) - 2(n-1)x P_n'(x) + n(n-1) P_n(x) = 0$

Partie II

1. Soit $g \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que :
   - ☛ $\exists k \in \mathbb{N}^*, \exists (\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ avec $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_k$ et $\forall i \in \{1, \ldots, k\}, g(\alpha_i) = 0$
   - ☛ $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

   (a) Montrer que : $\exists (\beta_0, \beta_k) \in \mathbb{R}^2$ avec $\beta_0 < \alpha_1$ et $\alpha_k < \beta_k$ tels que $g'(\beta_0) = g'(\beta_k) = 0$
   (b) Montrer que : $\exists (\beta_1, \ldots, \beta_{k-1}) \in \mathbb{R}^{k-1}$ avec $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{k-1} < \beta_{k-1} < \alpha_k$ tels que $\forall i \in \{1, \ldots, k-1\},\ g'(\beta_i) = 0$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$ fixé.
   (a) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en au moins $(n-1)$ réels distincts.
   (b) Montrer que P_n possède exactement $(n-1)$ racines réelles disctinctes.
3. (a) Etablir par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n(f(x)) \sin\left(n\left(f(x) + \dfrac{\pi}{2}\right)\right)$
   (b) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(f(x)) > 0$. Déterminer les racines réelles de $f^{(n)}$ pour $n \geqslant 2$
   (c) En déduire la factorisation de P_n lorsque $n \geqslant 2$

Partie III

1. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C},\ x \to \dfrac{1}{x+a}$.
   Déterminer $\varphi^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. (a) Montrer que : $\exists b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \,\middle|\, \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{2b}\left(\dfrac{1}{x-b} - \dfrac{1}{x+b}\right)$

   (b) Déterminer alors $f^{(n)}$ pour tout $n \geqslant 2$ (d'abord sous forme complexe puis sous forme réelle)

   (c) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) = (-1)^{n-1}\,(n-1)! \displaystyle\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p\, x^{n-1-2p}$

Partie IV

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1. Étudier les variations de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$. Déterminer en particulier $M = \displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}} \left|f''(x)\right|$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Soit $k \in \{1, \ldots, n\}$. Montrer que $\left|f\left(\dfrac{k}{n^2}\right) - \dfrac{k}{n^2}\right| \leqslant \dfrac{k^2}{2n^4}M$

3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2n} + \dfrac{M}{2n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. Déterminer la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

CORRECTION : DÉRIVÉES N-IÈMES DE arctan

CORRECTION : Etude de la dérivée énième de la fonction arctangente

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(x)$

Partie I

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer : f de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et il existe un polynôme P_n tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n et de P'_n

Soit R_n la propriété de récurrence : " f est de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ "

- ◈ R₁ vraie ? On a f de classe C^1 et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)}$. En posant P_1 le polynôme constant égal à 1, on a bien trouvé un polynôme P_1 tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \dfrac{P_1(x)}{(1+x^2)}$ Ainsi **R_1 est vraie**
- ◈ Si R_n est vraie (avec $n \geq 1$), R_{n+1} est-elle également vraie ? On a : f de classe C^n sur $\mathbb{R}$ et $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$. Cette fonction $f^{(n)}$ est alors de classe C^1 comme quotient de deux fonctions de classe C^1 dont le dénominateur ne s'annule pas. Donc f est de classe C^{n+1} sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{(1+x^2)P'_n(x) - 2\,n\,x\,P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$.

  On pose alors P_{n+1} le polynôme défini par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x) - 2\,n\,x\,P_n(x)$. C'est bien un polynôme vérifiant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = \dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}$ Ainsi **R_{n+1} est vraie**
- ➢ Ainsi on a montré R_1 vraie et, si R_n vraie avec $n \geq 1$, R_{n+1} est vraie aussi. Donc, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1 \Rightarrow R_n$ vraie . **D'où f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\exists P_n \in \mathbb{R}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$**

La propriété de récurrence nous donne la relation entre P_n et P_{n+1}, à savoir : **$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = (1+X^2)P'_n - 2\,n\,X\,P_n$**

2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (-1)^{n-1}\,n!\,x^{n-1} + Q_n(x)$ où Q_n est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-2$.
En déduire, si $n \geq 2$, le degré et le coefficient du terme de plus haut degré de P_n

Soit R_n la propriété de récurrence : " $\exists Q_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (-1)^{n-1}\,n!\,x^{n-1} + Q_n(x)$ "

- ◈ R₂ vraie ? On a : $P_2 = -2X$. Ainsi en posant $Q_2 = 0$, on a bien trouvé un polynôme Q_2 de degré inférieur à 0 tel que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_2(x) = (-1)^{2-1}\,2!\,x^{2-1} + Q_2(x)$ Ainsi **R_2 est vraie**
- ◈ Si R_n est vraie (avec $n \geq 2$), R_{n+1} est-elle également vraie ? On a : $\exists Q_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, $P_n = (-1)^{n-1}\,n!\,X^{n-1} + Q_n$

Or on a : $P_{n+1} = (1+X^2)P'_n - 2\,n\,X\,P_n = (-1)^n\,(n+1)!\,X^n + \left((n-1)(-1)^{n-1}\,n!\,X^{n-2} + (1+X^2)\,Q'_n - 2\,n\,X\,Q_n\right)$

On pose : $Q_{n+1} = (n-1)(-1)^{n-1}\,n!\,X^{n-2} + (1+X^2)\,Q'_n - 2\,n\,X\,Q_n$

On a bien Q_{n+1} polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$ et vérifiant : $P_{n+1} = (-1)^n\,(n+1)!\,X^n + Q_{n+1}$: **R_{n+1} est vraie**

- ➢ Ainsi on a montré R_2 est vraie et que, si R_n vraie avec $n \geq 2$, R_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow R_n$ vraie . i.e. **$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2 \Rightarrow \exists Q_n \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (-1)^{n-1}\,n!\,x^{n-1} + Q_n(x)$**

On en déduit que P_n est de degré $n-1$ et que son coefficient dominant est $(-1)^{n-1}\,n!$

3) a) On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = (1+x^2)f''(x) + 2x\,f'(x)$. Calculer $h(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

On reconnaît dans h, la dérivée de la fonction $x \to (1+x^2)\,f'(x)$. Or on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)\,f'(x) = 1$ d'où **$\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 0$**

b) Soit $n \geq 1$. En calculant $h^{(n)}$ de deux manières différentes, montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)\,f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)\,f^{(n+1)}(x) + n(n+1)\,f^{(n)}(x) = 0$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Puisque h est la fonction nulle, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h^{(n)}(x) = 0$

D'autre part, h étant une somme de produit de fonctions de classe C^∞, on obtient en utilisant la formule de Leibniz :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h^{(n)}(x) = (1+x^2)\,f^{(n+2)}(x) + 2\,n\,x\,f^{(n+1)}(x) + n\,(n-1)\,f^{(n)}(x) + 2\,x\,f^{(n+1)}(x) + 2\,n\,f^{(n)}(x) = 0$.

Ainsi : **$\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)\,f^{(n+2)}(x) + 2x(n+1)\,f^{(n+1)}(x) + n(n+1)\,f^{(n)}(x) = 0$**

c) En déduire : $\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{n+2}(x) + 2(n+1)\,x\,P_{n+1}(x) + n(n+1)(1+x^2)\,P_n(x) = 0$

En remplaçant dans l'expression précédente, $f^{(n)}$, $f^{(n+1)}$ et $f^{(n+2)}$ par leurs expressions en fonction de P_n, P_{n+1} et P_{n+2}, on obtient :

$\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)\dfrac{P_{n+2}(x)}{(1+x^2)^{n+2}} + 2(n+1)\,x\,\dfrac{P_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}} + n(n+1)\dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n} = 0$

donc en multipliant par $(1+x^2)^{n+1}$: **$\forall n \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_{n+2}(x) + 2(n+1)\,x\,P_{n+1}(x) + n(n+1)(1+x^2)\,P_n(x) = 0$**

4) En utilisant les relations établies aux **1)** et **3)**, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $(1+x^2)\,P''_n - 2(n-1)x\,P'_n(x) + n(n-1)\,P_n(x) = 0$

Question 1), on a établi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = (1+X^2)P'_n - 2\,n\,X\,P_n$ Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} - (1+X^2)P'_{n+1} + 2\,(n+1)\,X\,P_{n+1} = 0$

Or on vient d'établir au 3) : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+2} + 2(n+1)\,X\,P_{n+1} + n(n+1)(1+X^2)\,P_n = 0$. Aussi : **$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P'_{n+1} = -\,n\,(n+1)\,P_n$ (E)**

Or, puisque $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P_{n+1} = (1+X^2)P'_n - 2\,n\,X\,P_n$, donc en dérivant, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P'_{n+1} = (1+X^2)P''_n + 2\,X\,P'_n - 2\,n\,X\,P'_n - 2\,n\,P_n = (1+X^2)P''_n + 2(1-n)\,X\,P'_n - 2\,n\,P_n$

Ainsi, en remplaçant dans la relation (E), on obtient : **$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $(1+X^2)\,P''_n - 2(n-1)\,X\,P'_n + n(n-1)\,P_n = 0$**

Partie II

1) Soit $g \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que : **(i)** $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ et **(ii)** $\exists k \in \mathbb{N}^*$, $\exists(\alpha_1,\dots,\alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ avec $\alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k$ et $\forall i \in \{1,\dots,k\}$, $g(\alpha_i) = 0$

a) Montrer que : $\exists(\beta_1,\beta_{k+1}) \in \mathbb{R}^2$ avec $\beta_1 < \alpha_1$ et $\alpha_k < \beta_{k+1}$ et $g'(\beta_1) = g'(\beta_{k+1}) = 0$

g étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, \alpha_1]$, s'annulant en α_1 et de limite 0 en $-\infty$, on a d'après le théorème de Rolle généralisé, l'existence d'un élément β_1 sur $]-\infty, \alpha_1[$ en lequel s'annule la dérivée g'.
De même, en appliquant le théorème de Rolle généralisé sur $[\alpha_k, +\infty[$, on a l'existence d'un élément β_{k+1} de $]\alpha_k, +\infty[$ en lequel s'annule la dérivée g'. **$\exists(\beta_1,\beta_{k+1}) \in \mathbb{R}^2$ avec $\beta_1 < \alpha_1$ et $\alpha_k < \beta_{k+1}$ et $g'(\beta_1) = g'(\beta_{k+1}) = 0$**

b) Montrer : $\exists(\beta_2,\dots,\beta_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$ avec $\alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \dots < \beta_k < \alpha_k$ et $\forall i \in \{1,\dots,k-1\}$, $g'(\beta_i) = 0$

On applique cette fois le théorème de Rolle (tout court…) sur chaque segment $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, et on obtient :
$\exists(\beta_2,\dots,\beta_k) \in \mathbb{R}^{k-1}$ avec $\alpha_1 < \beta_2 < \alpha_2 < \dots < \beta_k < \alpha_k$ et $\forall i \in \{1,\dots,k-1\}$, $g'(\beta_i) = 0$

2) Soit $n \geq 2$ fixé.

a) Montrer que $f^{(n)}$ s'annule en au moins $(n-1)$ réels distincts

Soit R_n la propriété de récurrence : " $f^{(n)}$ s'annule en au moins $(n-1)$ réels différents "

- ◈ R₂ vraie ? On a : $f'' : x \longrightarrow \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$. Donc f'' s'annule en un réel. Ainsi **R_2 est vraie**
- ◈ Si R_n est vraie (avec $n \geq 2$), R_{n+1} est-elle également vraie ? On a : $f^{(n)}$ s'annule en au moins $(n-1)$ réels différents et $f^{(n)}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, puisque $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$ avec P_n de degré $n-1$, $f^{(n)}$ posséde des limites nulles en $-\infty$ et en $+\infty$. Ainsi d'après la question précédente, $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois de plus que $f^{(n)}$, et donc $f^{(n+1)}$ s'annule en au moins n réels différents. Ainsi **R_{n+1} est vraie**
- ➢ Ainsi on a montré que R_2 est vraie et que, si R_n vraie avec $n \geq 2$, R_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2 \Rightarrow R_n$ vraie . **En particulier, si $n \geqslant 2$, $f^{(n)}$ s'annule en au moins $(n-1)$ réels distincts.**

b) Montrer que P_n possède exactement $(n-1)$ racines réelles distinctes.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $P_n(x) = (1+x^2)^n\,f^{(n)}(x)$. Ainsi, les zéros de $f^{(n)}$ sont aussi des zéros de P_n. Donc on sait que P_n possède au moins $(n-1)$ zéros réels distincts. Or P_n est de degré $(n-1)$, donc on a trouvé toutes ses racines.
Ainsi, P_n a exactement $(n-1)$ racines réelles distinctes, et ces zéros sont simples

3) a) Etablir par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin\left(n(f(x)+\frac{\pi}{2})\right)$

Soit R_n la propriété de récurrence : " $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin\left(n(f(x)+\frac{\pi}{2})\right)$ "

- ◈ R₁ vraie ? On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$. D'autre part, $0!\cos(f(x))\sin\left(f(x)+\frac{\pi}{2}\right) = \cos^2(f(x)) = \cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2}$
  Ainsi **R_1 est vraie**
- ◈ Si R_n est vraie (avec $n \geq 1$), R_{n+1} est-elle vraie ? On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin\left(n(f(x)+\frac{\pi}{2})\right)$. D'où, en dérivant : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = (n-1)!\left[\,n\,f'(x)\cos^n(f(x))\cos\left(n(f(x)+\frac{\pi}{2})\right) - n\,f'(x)\sin(f(x))\cos^{n-1}(f(x))\sin\left(n(f(x)+\frac{\pi}{2})\right)\right]$

$= n!\,f'(x)\cos^{n-1}(f(x))\left[\cos(f(x))\cos\left(n(f(x)+\frac{\pi}{2})\right) - \sin(f(x))\sin\left(n(f(x)+\frac{\pi}{2})\right)\right] = n!\cos^2(f(x))\cos^{n-1}(f(x))\cos\left(f(x)+n(f(x)+\frac{\pi}{2})\right)$

car $f'(x) = \cos^2(f(x))$. De plus $\sin(y+\frac{\pi}{2}) = \cos(y)$ donc $\cos\left(f(x)+n(f(x)+\frac{\pi}{2})\right) = \sin\left((n+1)(f(x)+\frac{\pi}{2})\right)$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n+1)}(x) = n!\cos^{n+1}(f(x))\sin\left((n+1)(f(x)+\frac{\pi}{2})\right)(f(x))\sin\left(n(f(x)+\frac{\pi}{2})\right)\,]$ Ainsi **R_{n+1} est vraie**

- ➢ Ainsi on a montré que R_1 est vraie et que, si R_n vraie avec $n \geq 1$, R_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1 \Rightarrow R_n$ vraie . **En particulier, si $n \geqslant 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = (n-1)!\cos^n(f(x))\sin\left(n(f(x)+\frac{\pi}{2})\right)$**

c) Vérifier que: $\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(f(x)) > 0$. Déterminer les racines réelles de $f^{(n)}$ pour $n \geq 2$

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ et cos est strictement positif sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$. Ainsi **$\forall x \in \mathbb{R}$, $\cos(f(x)) > 0$**

Ainsi : $f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(n(f(x)+\frac{\pi}{2})) = 0 \Leftrightarrow n(f(x)+\frac{\pi}{2}) \equiv 0\ [\pi] \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \mid f(x) = \frac{(2k-n)\pi}{2n}$ Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$

Ainsi $f^{(n)}(x) = 0 \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!] \mid f(x) = \frac{(2k-n)\pi}{2n} \Leftrightarrow \exists k \in [\![1, n-1]\!] \mid x = \tan\left(\frac{(2k-n)\pi}{2n}\right)$

De plus, sur $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ tan est injective, donc les $\tan\left(\frac{(2k-n)\pi}{2n}\right)$ sont distincts 2 à 2.

On a trouvé les racines réelles de $f^{(n)}$: **il s'agit des $\tan\left(\frac{(2k-n)\pi}{2n}\right)$ pour $k \in [\![1, n-1]\!]$**

d) En déduire la factorisation de P_n lorsque $n \geq 2$.

Ces réels sont des zéros de P_n, ils sont au nombre de $(n-1)$ et P_n est de degré $(n-1)$: ainsi on a trouvé toutes les racines de P_n et ces racines sont simples. De plus, le coefficient dominant de P_n est $(-1)^{n-1}\,n!$. Aussi on obtient la factorisation de P_n :

$$P_n = (-1)^{n-1}\,n!\prod_{k=1}^{n-1}\left(X - \tan\left(\frac{(2k-n)\pi}{2n}\right)\right)$$

Partie III

1. Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, $x \to \dfrac{1}{x+a}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n\ n!}{(x+a)^{n+1}}}$$

2. (a) On a clairement : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{1}{2i}\left(\dfrac{1}{x-i} - \dfrac{1}{x+i}\right)}$

   (b) En utilisant l'expression de la dérivée n-ième d'un fraction élémentaire, on a : si $n \geqslant 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}\ (n-1)!}{2i}\left(\frac{1}{(x-i)^n} - \frac{1}{(x+i)^n}\right) = \frac{(-1)^{n-1}\ (n-1)!}{2i}\ \frac{(x+i)^n - (x-i)^n}{(x^2+1)^n}}$$

   (c) Par définition de P_n, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, :

$P_n(x) = \left(x^2+1\right)^n\ f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}\ (n-1)!}{2i}\ \left((x+i)^n - (x-i)^n\right)$ i.e.

$P_n(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}\ (n-1)!}{2i}\ \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(i)^k\, x^{n-k} - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-i)^k\, x^{n-k}\right)$. Donc on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}$, :

$$\boxed{P_n(x) = (-1)^{n-1}\ (n-1)! \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2p+1} (-1)^p\, x^{n-1-2p}}$$

Partie IV

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right)$

1. On a : $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$ et $f^{(3)}(x) = 2\dfrac{3x^2-1}{(1+x^2)^3}$. Ainsi f'' est impaire, est décroissante sur $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$ et croissante sur $\left[\dfrac{1}{\sqrt{3}}, +\infty\right]$ et $|f''|$ atteint son maximum en $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$: ce maximum vaut $\boxed{M = \dfrac{3\sqrt{3}}{8}}$

2. D'après l'inégalité des accroissements finis, on a f' $M-$lipschitzienne.
En particulier, $\forall t \in \mathbb{R}^+, |f'(t) - f'(0)| \leqslant Mt$ et donc, si $k \in [\![1, n]\!]$, en intégrant entre 0 et $\dfrac{k}{n^2}$,

$$\boxed{\left|\frac{k}{n^2} - f\left(\frac{k}{n^2}\right)\right| \leqslant M\frac{k^2}{2n^4}}$$

3. En sommant dans l'inégalité précédente pour k variant de d à n, on a : $\left|u_n - \dfrac{n+1}{2n}\right| \leqslant \dfrac{M}{2n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. Ainsi $\left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \left|u_n - \dfrac{n+1}{2n}\right| + \left|\dfrac{n+1}{2n} - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2n} + \dfrac{M}{2n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$. Ainsi $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left|u_n - \dfrac{1}{2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2n} + \dfrac{M}{2n^4}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2}$. On en déduit que $\boxed{\textbf{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \textbf{ converge vers } \dfrac{1}{2}}$