# Devoir en temps libre n° 10

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

## Problème : CONCOURS COMMUN I.N.A. E.N.S.A. 1997

Remarques préliminaires

Le but de ce problème est d'étudier des méthodes permettant d'obtenir des valeurs approchées de en mettant en évidence des suites dont $\sqrt{2}$ est la limite. On pourra utiliser la calculatrice pour déterminer des valeurs approchées des termes successifs des suites, mais évidemment pas pour obtenir une valeur approchée de lui-même... On pourra par contre, utiliser, en les justifiant des encadrements usuels comme : $1 < \sqrt{2} < \dfrac{3}{2}$

### PARTIE I Première approximation de $\sqrt{2}$

On définit la fonction $f$ qui à tout réel $x$ positif ou nul associe : $x^2 - 2$. On notera $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal du plan, $B$ son point d'intersection avec $(Ox)$ et $A$ le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $a$, où $a$ désigne un réel strictement positif. On supposera de plus que les points $A$ et $B$ sont distincts.

1. Montrer qu'on peut définir par récurrence une suite $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de $\mathscr{C}$ de la manière suivante :
   - ☞ $M_0$ est un point quelconque de $\mathscr{C}$ distinct de $A$ et de $B$.
   - ☞ Pour tout $n$ entier naturel, $M_{n+1}$ est le point de $\mathscr{C}$ de même abscisse que le point d'intersection de l'axe $(Ox)$ avec la droite $(A\,M_n)$.

   On notera $u_n$ l'abscisse de $M_n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général $u_n$ .
   Montrer que l'on a, pour tout $n$ entier naturel, la relation : $u_{n+1} = \dfrac{2 + au_n}{a + u_n}$ et que $M_{n+1}$ est distinct de $A$, de $B$ et de $M_n$.

2. (a) Justifier, pour tout entier naturel $n$ : $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{a - \sqrt{2}}{a + u_n}\left(u_n - \sqrt{2}\right)$

   (b) En déduire, pour tout entier naturel $n$ : $\left|u_{n+1} - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right| \times \left|u_n - \sqrt{2}\right|$ puis que :
   $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left|1 - \dfrac{\sqrt{2}}{a}\right|^n \times \left|u_0 - \sqrt{2}\right|$

   (c) Comment peut-on choisir $a$ pour pouvoir en déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge ? On précisera sa limite.

3. Dans cette question on suppose : $a = 1, u_0 = 2$.

   (a) Montrer qu'on a, pour tout entier naturel $n$ non nul : $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$
   En déduire un rang $n_0$ à partir duquel $u_n$ est une approximation de $\sqrt{2}$ à $10^{-3}$ près.
   Justifier l'encadrement : $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$

   (b) Cette question est destinée à préciser la rapidité de la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   Pour cela on considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel $n$ par la relation : $v_n = \dfrac{u_n - \sqrt{2}}{u_n + \sqrt{2}}$.
   Montrer que c'est une suite géométrique. Préciser sa raison et son terme de rang 0.
   En déduire : $v_n = (-1)^n\left(\sqrt{2} - 1\right)^{2n+2}$ puis la majoration : $\left|u_n - \sqrt{2}\right| \leqslant 4 \times (0,2)^{n+1}$
   *On dira que la convergence de la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers sa limite est géométrique*

## PARTIE II La méthode de Newton (Algorithme de Babylone)

On reprend la courbe $\mathscr{C}$ définie dans la partie précédente.

1. (a) Montrer qu'il est possible de définir par récurrence une suite $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les deux conditions :
   - ☞ $a_0$ est un réel strictement positif.
   - ☞ Pour tout $n$ entier naturel, $a_{n+1}$ est l'abscisse du point d'intersection de l'axe $(Ox)$ avec la tangente en $P_n$ à $\mathscr{C}$, $P_n$ désignant le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse $a_n$ .

   Déterminer une relation entre $a_{n+1}$ et $a_n$ .

   (b) On considère la fonction $g$ définie, pour tout réel $x$ strictement positif par :

$$g(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$$

   Etudier les variations de $g$ sur $\mathbb{R}_+^*$

   (c) Montrer que, pour $n$ non nul, $a_n$ est supérieur ou égal à $\sqrt{2}$ .
   En déduire que, à partir du rang 1, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et admet une limite réelle.
   Vérifier que cette limite est $\sqrt{2}$.

2. Cette question est destinée à préciser la rapidité de la convergence de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour cela, on prend : $a_0 = 1,5$ et on considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $b_n = \dfrac{a_n - \sqrt{2}}{a_n + \sqrt{2}}$

   (a) Justifier la relation : $b_{n+1} = b_n^2$ , pour tout entier naturel $n$.
   Déterminer une expression de $b_n$ en fonction de $n$ et de $b_0$ .

   (b) Vérifier : $b_0 \leqslant 0,04$

   (c) En déduire l'encadrement : $0 < a_n - \sqrt{2} \leqslant 3 \times (0,04)^{2^n}$
   *On dira que la convergence de $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est quadratique.*

   (d) En déduire un rang $n_1$ à partir duquel $a_n$ est une approximation de $\sqrt{2}$ à $10^{-10}$ prés.

## PARTIE III Un problème de point fixe

Dans cette partie, on se propose de généraliser certains résultats mis en évidence dans les parties précédentes. On considérera une fonction $\phi$ définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle réel $I = [a, b]$. On note $m$ un réel tel que, pour tout $x$ de $I$, on ait : $|\phi'(x)| \leqslant m$ et on supposera que $m$ est un réel strictement inférieur à 1. Enfin, on supposera qu'il existe $\alpha$ élément de $I$ vérifiant la condition : $\phi(\alpha) = \alpha$. On se propose de trouver des valeurs approchées de $\alpha$ comme limite d'une suite et d'examiner la rapidité de la convergence de cette suite.

1. On définit par récurrence la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les conditions :
   - ☞ $u_0$ est élément d'un intervalle centré en $\alpha$ et inclus dans $I$.
   - ☞ Pour tout $n$ entier naturel, $u_{n+1} = \phi(u_n)$

   En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n$ est élément de $I$ et justifier la relation, pour tout $n$ entier naturel : $|u_n - \alpha| \leqslant m^n\, |u_0 - \alpha|$
   En déduire que la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\alpha$.

2. On suppose désormais que $\phi$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $I$ et que $K$ est un réel tel que, pour tout $x$ de $I$ on ait : $|\phi''(x)| \leqslant K$ . Dans cette question, on fera de plus les hypothèses supplémentaires suivantes: $\phi'(\alpha) = 0$ et $\phi''(\alpha) \neq 0$

(a) On suppose la formule de Taylor-Lagrange affirmant :

$$\forall t \in I, \exists \theta \in ]0,1[ \;\Big|\; \phi(t) = \phi(\alpha) + (t-\alpha)\,\phi'(\alpha) + \frac{(t-\alpha)^2}{2}\,\phi''\left(\alpha + \theta\,(t-\alpha)\right)$$

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - \alpha| \leqslant \dfrac{K}{2} \times (u_n - \alpha)^2$ puis que
$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{K}{2}\right)^{2^n - 1} \times |u_0 - \alpha|^{2^n}$

(b) En déduire que l'on peut choisir $u_0$ de manière à ce qu'il existe un réel strictement positif $A$ et un réel $q$ strictement compris entre 0 et 1 tel que : $|u_n - \alpha| \leqslant A q^{2^n}$

(c) **Application** En utilisant l'approximation de $\sqrt{2}$ trouvée dans la partie $I.3)a)$ et en appliquant les résultats précédents à la fonction $g$ définie dans la partie II, donner un indice $n_2$ à partir duquel $a_n$ est une approximation de $\sqrt{2}$ à $10^{-10}$ près.