MPSI 15-16 Feuille n° 14 : Groupe, Anneau

Du 07/01/16 au 15/01/16

Exercice 1. Soit la loi $\top$: $\forall (x,y) \in (]-1,1[)^2, x \top y = \dfrac{x+y}{1+xy}$. Montrer que $\big(]-1,1[, \top\big)$ est un groupe.

Exercice 2. Soit la loi $\top$: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \top y = \sqrt[5]{x^5+y^5}$. Montrer que $\big(\mathbb{R}, \top\big)$ est un groupe.

Exercice 3. Parmi les couples suivants, déterminer les groupes.

1. $\big(\mathbb{Q}, +\big)$
2. $\big(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, +\big)$
3. $\big(2\mathbb{Z}, +\big)$
4. $\big(2\mathbb{Z}+1, +\big)$
5. $\big(\mathbb{Z}^*, \times\big)$
6. $\big(\{z \in \mathbb{C} | z^n \in \mathbb{R}^*\}, \times\big)$
7. $\big(\{z \in \mathbb{C}^* | \operatorname{Re}(z) > 0\}, \times\big)$

Exercice 4. Soient H et K deux sous-groupes de $\big(G, \top\big)$.
Montrer que $H \cap K$ est un sous-groupe de $\big(G, \top\big)$.

Exercice 5. Soient H et K deux sous-groupes de $\big(G, \top\big)$.
Montrer que $H \cup K$ est un sous-groupe de $\big(G, \top\big)$ si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$

Exercice 6. Soit $\big(G, \top\big)$ un groupe. Soit a un élément de G. On définit les applications δ_a et γ_a par : $\forall x \in G, \delta_a(x) = a \top x$ et $\gamma_a(x) = x \top a$. Montrer que δ_a et γ_a sont des permutations de G.

Exercice 7. Soit $\big(G, \top\big)$ un groupe. On appelle centre de G l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G : $C = \big\{g \in G \,|\, \forall x \in G,\, x \top g = g \top x\big\}$. Montrer que C est un sous-groupe de $\big(G, \top\big)$

Exercice 8.

1. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose U_n l'ensemble des racines $n-$ièmes de l'unité. Montrer que $\big(U_n, \times\big)$ est un groupe commutatif.
2. On munit l'ensemble produit $U_2 \times U_3$ de l'opération $\top$ définie par :

$$\forall\left((x,y),(x',y')\right), (x,y) \top (x',y') = (x \times x', y \times y')$$

   Montrer que $\big(U_2 \times U_3, \top\big)$ est un groupe commutatif.

Exercice 9. Soit $\big(G, .\big)$ un groupe d'élément neutre e tel qu'il existe deux éléments a et b vérifiant : $a^4 = e$, $b^2 = e$ et $a.b = b.a^3$. Montrer que $H = \big\{e, a, a^2, a^3, b, a.b, a^2.b, a^3.b\big\}$ est un sous-groupe de G et déterminer sa table de groupe.

Exercice 10. Déterminer les tables de tous les groupes à 1, 2, 3 ou 4 éléments.

Exercice 11. Soit $\big(G, .\big)$ un groupe.

1. Soit $(x,y) \in G^2$. Calculer et simplifier $\big(x.y.x^{-1}\big)^{-2}$
2. Soit $a \in G$ fixé. Que peut-on dire de l'application $y \longrightarrow a.y.a^{-1}$

Exercice 12. Soit $(G, \top)$ un groupe, d'élément neutre e. On suppose que $\forall x \in G, x \top x = e$. Montrer que $(G, \top)$ est commutatif.

Exercice 13. On considère le couple $(\mathbb{R}^2, \Delta)$ où Δ est définie par : $(x,y)\Delta(x',y') = \left(x + x', ye^{x'} + y'e^{x}\right)$.

1. Vérifier que $(\mathbb{R}^2, \Delta)$ est un groupe
2. Déterminer les applications dérivables f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ telles que $\{(x, f(x)) \,|\, x \in \mathbb{R}\}$ soit un sous-groupe de $(\mathbb{R}^2, \Delta)$.

Exercice 14. Soit $n \geqslant 3$. Pour tout couple (k,p) de $[\![1,n]\!]^2$, on note $\tau_{k,p}$ la transposition de $[\![1,n]\!]$ échangeant k et p. Montrer que $\forall (i,j) \in [\![2,n]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow \tau_{i,j} = \tau_{1,j} \circ \tau_{1,i} \circ \tau_{1,j}$

Exercice 15. Soit $n \geqslant 3$. Montrer que $(S_n, \circ)$ est un groupe non commutatif .

Exercice 16. Déterminer le groupe G des isométries du plan conservant un carré $ABCD$. Construire sa table de groupe.
On rappelle qu'une isométrie est une transformation conservant les distances et que, les isométries du plan ayant un point fixe Ω sont l'identité, les rotations de centre Ω et les syméries orthogonales d'axe passant par Ω. On montrera que les isométries du plan conservant un carré sont au nombre de 8.

Exercice 17. Soit $\mathbb{Z}[i] = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \exists\, (a,b) \in \mathbb{Z}^2; z = a + ib\}$ l'ensemble des entiers de Gauss.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau commutatif.
2. Déterminer les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i]$ (penser au module)

Exercice 18. Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Q}$. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) = \left\{ r + r'\sqrt{\alpha} \,\middle|\, (r,r') \in \mathbb{Q}^2 \right\}$ est un corps pour les lois $+$ et $\times$ usuelles.

Exercice 19. Soit $(A, +, \times)$ un anneau. On dit que $a \in A$ est nilpotent ssi $\exists n \in \mathbb{N}^* \Big| a^n = 0_A$

1. Si a est un élément nilpotent de A, montrer que $1_A - a$ est inversible
2. Montrer que si $a \times b$ est nilpotent alors $b \times a$ est aussi nilpotent

Exercice 20. On note $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ l'ensemble des "tableaux" à 2 lignes et 2 colonnes et à coefficients réels : $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \,\middle|\, (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \right\}$. On munit cet ensemble de deux opérations :

$+$ Une addition notée $+$ définie par : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+a' & b+b' \\ c+c' & d+d' \end{pmatrix}$

$\times$ Une multiplication notée $\times$ définie par : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a.a'+b.c' & a.b'+b.d' \\ c.a'+d.c' & c.b'+d.d' \end{pmatrix}$

1. Montrer que $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \times\right)$ est un anneau. Quels sont les éléments neutres des deux opérations ?
2. Calculer les produits : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Qu'en déduit-on quant à l'anneau $\left(\mathscr{M}_2(\mathbb{R}), +, \times\right)$?