MPSI 15-16 Feuille n° 15 : Arithmetique dans $\mathbb{Z}$

Du 15/01/16 au 22/01/16

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $51x + 44y = 1$

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $3x^2 + xy = 11$

Exercice 3. Résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^2$ le système suivant $\begin{cases} x+y & = 56 \\ \text{ppcm}(x,y) & = 105 \end{cases}$

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $700x + 429y = 1$

Exercice 5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les entiers a_n et b_n par la relation : $\left(1+\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$. Montrer que a_n et b_n sont premiers entre eux.

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ les équations : $6x + 15y = 2$ puis $6x + 15y = 24$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant $\begin{cases} a+b & = 48 \\ \text{pgcd}(a,b) & = 6 \end{cases}$

Exercice 8. Soit $(x,y) \in \mathbb{Z}^2 \big| x \wedge y = 1$. Montrer que $(3x+4y) \wedge (4x+5y) = 1$

Exercice 9. Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Soit $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2 \big| a.u_0 + b.v_0 = 1$. Déterminer tous les couples $(u,v) \in \mathbb{Z}^2 \big| a.u + b.v = 1$.

Exercice 10. Critères de divisibilité par 3, 9 et 11

1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}, 10^k \equiv 1[9]$. En déduire qu'un entier n est divisible par 9 sssi la somme de ses chiffres (en base 10) est divisible par 9. Même question avec 3 au lieu de 9
2. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}, 10^k \equiv (-1)^k\,[11]$. En déduire qu'un entier n est divisible par 11 sssi la différence entre la somme de ses chiffres de rang pair et la somme de ses chiffres de rang impair (en base 10) est divisible par 11.

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $137x + 305y = 97$

Exercice 12. Résoudre dans $\mathbb{Z}^3$ l'équation : $10x + 15y + 6z = 7$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le pgcd de $2n^7 + 1$ et de $3n^2 + 2$ est soit 1 soit 2699.

Exercice 14. Déterminer le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7.

Exercice 15. On note $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5 \cdots, p_n$ le n-ième nombre premier et, si $x \in \mathbb{R}^+$, $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à x.

1. Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, p_{k+1} \leqslant 1 + p_1 p_2 \cdots p_k$
2. En déduire $\forall n \in \mathbb{N}^*, p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$
3. En déduire $\forall x > 1, \pi(x) \geqslant \ln(\ln(x))$

Exercice 16. Trouver tous les entiers n vérifiant : $\begin{cases} n \equiv 2 \ [8] \\ n \equiv 3 \ [27] \end{cases}$

Exercice 17. Montrer que 3 est le seul nombre premier p tel que $p+2$ et $p+4$ soient aussi des nombres premiers.

Exercice 18. Montrer que 5 est le seul nombre premier p tel que $p+2, p+6, p+8, p+12$ et $p+14$ soient aussi des nombres premiers.

Exercice 19.
1. Montrer que, si m est un entier impair somme de deux carrés, alors $m \equiv 1[4]$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que le reste de la division euclidienne de n^2 par 8 est 0, 1 ou 4.
3. En déduire qu'un entier congru à 7 modulo 8 n'est pas la somme de trois carrès

Exercice 20. On pose, pour $n \in \mathbb{N}, F_n = 2^{2^n} + 1$, nombre de Fermat d'ordre n

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^*, F_n$ divise $F_{n+k} - 2$
2. En déduire quee les nombres de Fermat sont premiers deux à deux.
3. En déduire une nouvelle démonstration de l'existence d'une infinité de nombres premiers

Exercice 21. Trouver tous les entiers n vérifiant : $\begin{cases} n \equiv 1 \ [3] \\ n \equiv 2 \ [5] \\ n \equiv 3 \ [8] \end{cases}$

Exercice 22. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. On munit l'ensemble $F_n = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{n-1}\right\}$ des classes d'équivalence modulo n des opérations $\oplus$ et $\otimes$ définies par :
$\forall (\overline{x}, \overline{y}) \in F_n^2, \overline{x} \oplus \overline{y} = \overline{x+y}$ et $\overline{x} \otimes \overline{y} = \overline{x \times y}$

1. Montrer que $(F_n, \oplus, \otimes)$ est un anneau commutatif
2. Ecrire les tables de multiplications de F_7, F_{11} et F_{12}.
3. Montrer que si n est premier, $(F_n, \oplus, \otimes)$ est un corps
4. Montrer que si n n'est pas premier, $(F_n, \oplus, \otimes)$ possède des diviseurs de zéro : ce n'est pas un anneau intègre. Déterminer les éléments inversibles.