Devoir en temps libre n° 11

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME I : Etude de la fonction $x \to \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\mathrm{sh}(x)}$

1. (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$
   (b) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Donner la valeur en 0 de ce prolongement. On pose g la fonction continue de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}^*$ est f.
   (c) Déterminer un développement limité de g à l'ordre 5 en 0.
   (d) Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Préciser les valeurs de $g'(0)$ et $g''(0)$.
2. (a) Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+ ,\ 0 \leqslant t\,\mathrm{ch}(t) - \mathrm{sh}(t) \leqslant \dfrac{1}{2}\,\mathrm{sh}^2(t)$
   (b) Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. Montrer que g est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
   (c) Tracer la courbe représentative de g.

PROBLEME II : Développement asymptotique de x_n tel que $\tan x_n = x_n$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$, une unique solution notée x_n. On montrera aussi que $x_n \in \left]n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.
   Le but du problème est de chercher un développement limité à la précision $\dfrac{1}{n^4}$ de x_n.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = x_n - n\pi$
   (a) Montrer que l'on a : $y_n = \dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$
   (b) En déduire la limite éventuelle de y_n puis trouver un développement généralisé de x_n à la précision n^0.
3. Dans cette question, on veut obtenir un DLG de x_n à la précision $\dfrac{1}{n^2}$
   (a) En utilisant ce qui précède, donner un DLG de $\dfrac{1}{x_n}$ à la précision $\dfrac{1}{n^2}$
   (b) En déduire un DLG de y_n à la précision $\dfrac{1}{n^2}$
   (c) En déduire un DLG de x_n à la précision $\dfrac{1}{n^2}$
4. Renouveler la méthode précédente pour montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi^2}\right)\frac{1}{n^3\pi} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\right)\frac{1}{2n^4\pi} + \circ\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Correction : DL et Developpement asymptotique

CORRIGE : Développement limité généralisé des solutions de tan(x)=x

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que l'équation $\tan(x) = x$ admet, sur $\left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ une unique solution notée x_n. On montrera aussi que $x_n \in \left]n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On étudie la fonction f_n définie sur $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$ par : $\forall x \in I_n$, $f_n(x) = \tan(x) - x$

On a : f_n strictement croissante sur I_n (f_n dérivable de dérivée $\tan^2$ positive et ne s'annulant qu'en un point), continue sur I_n et admettant des limites infinies en $-\frac{\pi}{2}+n\pi$ et $\frac{\pi}{2}+n\pi$. Aussi, par le théorème d'homéomorphisme, f_n est une bijection de I_n vers $\mathbb{R}$.

En particulier, il existe un unique x_n de I_n tel que $f_n(x_n) = 0$.

Ainsi, l'équation $\tan(x) = x$ admet x_n pour unique solution sur $I_n = \left]-\frac{\pi}{2}+n\pi, \frac{\pi}{2}+n\pi\right[$

Par ailleurs : $f_n(x_n) = 0 > -n\pi = f_n(n\pi)$. Ainsi, comme f_n est strictement croissante sur I_n, **on a $x_n > n\pi$**

Le but du problème est de chercher un développement limité à la précision n^{-4} de x_n

2) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $y_n = x_n - n\pi$

a) Montrer que l'on a pour $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$

$\tan(y_n) = \tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$. Or y_n est dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, intervalle sur lequel tan est injective et dont la réciproque est arctan. Aussi: **$y_n = \arctan(x_n)$**. Par ailleurs, comme $x_n > 0$: $\arctan(x_n) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$. Aussi : **$y_n = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$**

b) En déduire la limite éventuelle de y_n puis trouver un développement limité généralisé de x_n à la précision n^0

Puisque $x_n > n\pi$, la suite $(x_n)_{n>0}$ diverge vers $+\infty$. Ainsi par continuité de arctan en 0, **y_n converge vers $\frac{\pi}{2}$**.

Ainsi : **$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)$**

3) Dans cette question on veut aboutir à un DLG de x_n à la précision n^{-2}

a) Donner en utilisant ce qui précède un DLG de $\frac{1}{x_n}$ à la précision n^{-2}.

On a : $x_n = n\pi\left(1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$. D'où : $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{n\pi} \times \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

D'où : **$\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$**

b) En déduire un DLG de y_n à la précision n^{-2}.

On a : $\arctan(t) = t + o(t^2)$ en 0 donc : $\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ et ainsi : **$y_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$**

c) En déduire un DLG de x_n à la précision n^{-2}.

Le DL précédent nous donne : **$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$**

4) Renouveler la méthode précédente pour montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$: $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi^2}\right)\frac{1}{n^3\pi} + \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{\pi^2}\right)\frac{1}{2n^4\pi} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

On a : $x_n = n\pi\left(1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2n^3\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$. D'où : $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2n^3\pi^2} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)}$

D'où : $\frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} \times \left(1 - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2n^3\pi^2}\right) + \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2n^3\pi^2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2\pi^2} + \frac{1}{2n^3\pi^2}\right)^3 + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} \times \left(1 - \frac{1}{2n} + \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{n^2} - \left(\frac{3}{2\pi^2} + \frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{x_n} = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{n^3\pi} - \left(\frac{3}{2\pi^2} + \frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^4\pi} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

Ainsi, comme $\arctan(t) = t - \frac{t^3}{3} + o(t^4)$ en 0, on en déduit :

$\arctan\left(\frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{n\pi} - \frac{1}{2n^2\pi} + \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4}\right)\frac{1}{n^3\pi} - \left(\frac{3}{2\pi^2} + \frac{1}{8}\right)\frac{1}{n^4\pi} - \frac{1}{3n^3\pi^3} + \frac{1}{2n^4\pi^3} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

D'où : $y_n = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi^2}\right)\frac{1}{n^3\pi} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{\pi^2}\right)\frac{1}{n^4\pi} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$

Et donc : **$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} - \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3\pi^2}\right)\frac{1}{n^3\pi} + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{\pi^2}\right)\frac{1}{n^4\pi} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)$**

CORRIGE : ETUDE DE LA FONCTION $x \to {}^{x}/_{\mathrm{sh}(x)}$

Soit f la fonction de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ définie par : $\forall x \neq 0$, $f(x) = \frac{x}{\mathrm{sh}\, x}$ où sh désigne le sinus hyperbolique.

1) **a)** Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$

Sur $\mathbb{R}^*$, f est le quotient de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas **donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$**

a) Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. Donner la valeur de ce prolongement en 0.

Au voisinage de 0, on a : $\mathrm{sh}(x) \sim x$. Donc f possède 1 pour limite en 0. Ainsi **f est prolongeable par continuité en 0 , la valeur de ce prolongement étant 1**

On pose g la fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dont la restriction à $\mathbb{R}^*$ est f

b) Déterminer un développement limité de g à l'ordre 5 en 0

On a : $\frac{\mathrm{sh}\, x}{x} = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + o(x^5)$. D'où $\frac{x}{\mathrm{sh}\, x} = 1 - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o(x^5)$

et donc **$\frac{x}{\mathrm{sh}\, x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o(x^5)$**

c) Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. Préciser les valeurs g'(0) et g''(0).

g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2 x}$.

Or, au voisinage de 0 : $\mathrm{sh}^2 x \sim x^2$ et $\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x) \sim -\frac{x^3}{3}$ d'où $g'(x) \sim -\frac{x}{3}$

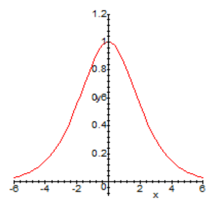
Ainsi, g est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et possède une limite finie (0) en 0. Donc d'après le théorème de prolongement, **g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a de plus g'(0) = 0**

g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$ et on a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g''(x) = \frac{2x\,\mathrm{ch}^2(x) - 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{sh}^3 x}$.

Or, au voisinage de 0 : $\mathrm{sh}^3 x \sim x^3$ et $2x\,\mathrm{ch}^2(x) - 2\,\mathrm{ch}(x)\,\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{sh}^2(x) \sim -\frac{x^3}{3}$ d'où $g'(x) \sim -\frac{1}{3}$

Ainsi, g' est continue sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ et possède une limite finie $\left(-\frac{1}{3}\right)$ en 0. Donc d'après le théorème de prolongement, **g' est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et on a de plus $g''(0) = -\frac{1}{3}$**

2) **a)** Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$. **b)** Tracer la courbe représentative de g



g étant paire, il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$ et de compléter par symétrie d'axe (Oy) pour obtenir tout son graphe

On a : $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{sh}^2 x}$. On pose $h : x \to \mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)$.

h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -x\,\mathrm{sh}(x) \leqslant 0$

Ainsi h est décroissante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = 0$ donc h est négative sur $\mathbb{R}^+$.

En particulier, **g est décroissante sur $\mathbb{R}^+$**

D'autre part, $x = o(\mathrm{sh}\, x)$ en $+\infty$. **D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ donc le graphe de g possède l'axe (Ox) pour asymptote**

On pose $\varphi : x \to \frac{1}{2}\mathrm{sh}^2(x) + \mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)$. φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi'(x) = (\mathrm{ch}(x) - x)\,\mathrm{sh}(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}^+$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $-\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq 0$. Cet encadrement étant également vérifié en 0 et, par parité, sur $\mathbb{R}_-^*$, on en déduit que **g est lipschitzienne de rapport ½**