Devoir en temps libre n° 12

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$

1. Donner deux exemples, bien distincts, de sous-groupes de $(\mathbb{R}, +)$
   On note, pour $a \in \mathbb{R}^+$, $a\mathbb{Z} = \{na;\, n \in \mathbb{Z}\}$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Montrer que $(a\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.
3. Soit G un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$ non réduit à $\{0_\mathbb{R}\}$. On considère : $\alpha = \inf \{x \in G |\, x > 0\}$
   (a) Rappeler la définition et la caractérisation de la borne inférieure
   (b) Supposons dans un premier temps $\alpha > 0$ et montrons que $\alpha \in G$.
   Supposons par l'absurde que : $\alpha \notin G$.
      i. Montrer que l'existence de $x \in G$ tel que : $\alpha < x < 2\alpha$.
      ii. Montrer que l'existence de $y \in G$ tel que : $\alpha < y < x$.
      iii. Montrer, en considérant $x - y$, que α n'est alors pas la borne inférieure de $\{x \in G |\, x > 0\}$.
   (c) En déduire $\alpha\mathbb{Z} \subset G$
   (d) Montrer $G \subset \alpha\mathbb{Z}$. (Pour cela, on pourra utiliser, après justification, l'existence pour tout $g \in G$ de $n \in \mathbb{Z}$ et $\beta \in [0, \alpha[$ tels que $g = n\alpha + \beta$)
   (e) Supposons maintenant $\alpha = 0$.
      i. A-t-on $\alpha \in G$?
      ii. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0, \exists g \in G |\, 0 < g < \varepsilon$
      iii. En déduire que G est dense dans $\mathbb{R}$, i.e., $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x < y, \exists t \in G |\, x < t < y$
4. Donner un exemple de sous-groupe dense de $(\mathbb{R}, +)$
5. On considère $\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right) = \left\{p + q\sqrt{2} |\, (p, q) \in \mathbb{Q}^2\right\}$
   (a) Montrer que $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), +\right)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$
   (b) Est-il dense ?
   (c) Montrer que $\left(\mathbb{Q}\left(\sqrt{2}\right), +, \times\right)$est un corps.