MPSI 15-16 Feuille n° 16 : Polynomes

Du 27/01/16 au 02/02/16

Exercice 1. Calculer, pour tout entier naturel n non nul, les coefficients des polynômes :
$P_n = \left(1 + X + X^2 + \cdots + X^n\right)^2$ et $Q_n = (1+X) \times \left(1+X^2\right) \times \left(1+X^4\right) \times \cdots \times \left(1+X^{2^n}\right)$

Exercice 2. En utilisant $(1+X)^{2n} . (1-X)^{2n} = \left(1-X^2\right)^{2n}$, montrer que :
$$\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k \left(\binom{2n}{k}\right)^2 = (-1)^n \binom{2n}{n}$$

Exercice 3.
1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a \neq b$. Calculer dans $\mathbb{R}[X]$ le reste de la division euclidienne d'un polynôme P par $(X-a)(X-b)$ en fonction de $P(a)$ et $P(b)$
2. Que dire si $a = b$?
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X \sin(\alpha) + \cos(\alpha))^n$ par $X^2 + 1$?

Exercice 4. Effectuer les divisions euclidiennes de :
1. $X^8 - 1$ par $X^3 - 1$
2. $7X^4 - X^3 + 2X - 4$ par $X^2 - 3X + 5$

Exercice 5. Trouver λ pour que l'équation $x^3 - 7x + \lambda = 0$ ait une racine qui soit le double d'une autre.

Exercice 6. Montrer que l'équation $x^4 + 2x^2 + 4x - 1 = 0$ a tous ses zéros simples.

Exercice 7. Factoriser $X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 4X + 2$ sachant qu'il y a deux racines opposées.

Exercice 8. Trouver $(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \;\Big|\; \begin{cases} x+y+z & = 1 \\ x^2+y^2+z^2 & = 9 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} & = 1 \end{cases}$

Exercice 9.
1. Factoriser $P = X^4 + X^3 + X^2 + X + 1$ sur $\mathbb{C}$ puis sur $\mathbb{R}$
2. Soit x une racine de P. Montrer que $x \neq 0$ et trouver une équation satisfaite par $z = x + \dfrac{1}{x}$
3. En déduire une autre factorisation de P sur $\mathbb{R}$ ainsi que $\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $\cos\dfrac{4\pi}{5}$.

Exercice 10.
1. Soit $P = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0$ où les a_k sont des entiers. Montrer que si la fraction irréductible $\dfrac{p}{q}$ est zéro de P alors p divise a_0, q divise a_n, $p-q$ divise $P(1)$ et $p+q$ divise $P(-1)$
2. Résoudre l'équation $6x^5 - x^4 - 11x^3 + 21x^2 - 16x + 4 = 0$ sachant qu'il y a des racines rationnelles.

Exercice 11. Soit $(p,q) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$ et (α, β, γ) le triplet des racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$. Exprimer en fonction de p et q : $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$, $\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3$ et $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} + \dfrac{1}{\gamma}$.

Exercice 12. Résoudre $X^4 - 12X - 5 = 0$ sachant qu'il y a deux zéros de somme 2

Exercice 13. Trouver $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré 7 tel que 1 soit racine d'ordre au moins 4 de $P+1$ et (-1) soit racine d'ordre au moins 4 de $P-1$

Exercice 14. Trouver un polynôme P de degré minimal tel que $\left(X^2+1\right)$ divise P et $\left(X^3+1\right)$ divise $P-1$

Exercice 15. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geqslant 2$. Pour $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note $\omega_k = \exp\left(\dfrac{2\,i\,k\,\pi}{n}\right)$.

Calculer $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega_k}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{1-\omega_k}$

Exercice 16. Polynômes de Tchebychev

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \exists! P_n \in \mathbb{R}[X] \middle| \forall \theta \in \mathbb{R}, P_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$
2. Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n
3. Déterminer les zéros de P_n se trouvant dans l'intervalle réel $[-1, 1]$
4. En déduire la factorisation de P_n dans $\mathbb{R}[X]$
5. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$ et $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$

Exercice 17. Soit $A = X^7 - X - 1$ et $B = X^5 + 1$. Déterminer les couples (U, V) de polynômes tels que $AU + BV = I$

Exercice 18. Factoriser : $(X+1)^n - e^{2\,i\,n\,a}$. En déduire une expression de $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1} \sin\left(a + \frac{k\pi}{n}\right)$

Exercice 19. Trouver tous les polynômes P vérifiant : $P(-2) = 3, P(0) = 3, P(1) = 6$ et $P(2) = 11$

Exercice 20. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$:

1. $X^n - 1$
2. $\left(1 - X^2\right)^3 + 8X^3$
3. $X^4 + X^2 + 1$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k X^k$