

Exercice 1. Décomposer en éléments simples :

- | | | |
|------------------------------|---|--|
| 1. $\frac{1}{(X+1)(X+2)}$ | 4. $\frac{2X^3 + 6X^2 - 4X - 4}{X(X+1)(X-1)^2}$ | 7. $\frac{1}{(X-1)(2X+1)^2}$ |
| 2. $\frac{3}{(X^3+1)}$ | 5. $\frac{3X^2 + X + 1}{(X-1)(X^2-4)}$ | 8. $\frac{X^3 - 4X + 5}{(X-1)^2}$ |
| 3. $\frac{2X-3}{(X-1)(X-2)}$ | 6. $\frac{4X^3}{(X^4-1)}$ | 9. $\frac{X^2 + 2X + 5}{X^2 - 3X + 2}$ |

Exercice 2. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

- | | |
|--------------------------------------|---------------------------------------|
| 1. $\frac{1}{X^4+1}$ | 3. $\frac{X^4+2}{X(X^2+1)(X^2-2)^2}$ |
| 2. $\frac{-12X}{X^6-14X^4+49X^2-36}$ | 4. $\frac{3X^5+2X^4+X^2+3X+2}{X^4+1}$ |

Exercice 3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:

- | | |
|--------------------------------------|--|
| 1. $\frac{1}{(X^n-1)}$ | 3. $\frac{X^n+1}{(X^n-1)}$ |
| 2. $\frac{1}{1+X+X^2+\dots+X^{n-1}}$ | 4. $\frac{n!}{X(X-1)\dots(X-n)}$ en déduire $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \binom{n}{k}$ |

Exercice 4. Calculer la dérivée n-ième de la fraction : $F(X) = \frac{1}{X(X+1)\dots(X+n)}$

Exercice 5. Déterminer la DES de $\frac{3X+5}{X^3+6X^2+11X+6}$ et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{3k+5}{k^3+6k^2+11k+6}$

Exercice 6. 1. Factoriser $X^6 + 2X^5 + 2X^4 + 2X^3 + X^2$ sachant qu'il y a des racines rationnelles
 2. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{X^7 + 3X^6 + 8X^5 + 9X^4 + X^2 - X - 1}{X^6 + 2X^5 + 2X^4 + 2X^3 + X^2}$

Exercice 7. 1. Calculer $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{2}{k^3 - k}$ 2. Calculer $T_n = \sum_{k=2}^n \frac{3k^2 - 1}{(k^3 - k)^2}$

Exercice 8. Soit $P = M \prod_{k=1}^n (X - a_k)$ un polynôme scindé à racines simples.

- Montrer que $\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{X - a_k}$
- En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{P''P - (P')^2}{P^2}$
- Déduire des deux premières questions $\sum_{k=1}^4 \frac{z_k^3 + 2}{(z_k^2 - 1)^2}$ où les z_k sont les zéros de $X^4 - X^3 + 1$

Exercice 9. 1. Déterminer les polynômes $Q_1, Q_2, Q_3, R_1, R_2, R_3$ avec $\deg(R_k) < 2$ obtenus par les divisions euclidiennes : $X^7 + 1 = (X^2 + X + 1)Q_1 + R_1$, $Q_1 = (X^2 + X + 1)Q_2 + R_2$ et $Q_2 = (X^2 + X + 1)Q_3 + R_3$

- En déduire la décomposition en éléments simples de $\frac{X^7 + 1}{(X^2 + X + 1)^3}$