Devoir surveillé n° 5 (4 heures)

Ce devoir est constitué d'un exercice et de deux problèmes (de concours).L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.
La calculatrice n'est pas autorisée.

Pour rappel, on donne certains DL qui pourront être utiles : il s'agit pour des raisons pratiques à chaque fois de DL à l'ordre 4 en 0.

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \circ\left(x^4\right) \quad , \quad \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \circ\left(x^4\right)$$
$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + \circ\left(x^4\right)$$

EXERCICE : Différence symétrique

On considère un ensemble E non vide. Pour A et B deux parties de E, on considère l'ensemble : $A\Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$. On rappelle que si $C \in \mathscr{P}(E)$, la fonction indicatrice de C est notée $\mathbb{1}_C$

1. Montrer que, pour tout couple (A, B) de parties de E, on a : $\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A - \mathbb{1}_B)^2$
2. Montrer que pour tout couple (A, B) de parties de E, on a : $A\Delta B = (A \setminus B) \bigcup (B \setminus A)$
3. Montrer que : $\forall (A, B, C) \in (\mathscr{P}(E))^3$, $(A\Delta B)\,\Delta C = A\Delta\,(B\Delta C)$.
4. Démontrer qu'il existe une unique partie de E, partie que l'on notera X_0 et que l'on déterminera, telle que : $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ A\Delta X_0 = A = X_0\Delta A$
5. Montrer que : $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ \exists! A' \in \mathscr{P}(E) \mid \quad A\Delta A' = X_0 = A'\Delta A$

PROBLEME I :

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(t) = \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \qquad \text{et} \qquad g(t) = \frac{f(t)}{t}$$

PARTIE A : Généralités

1. Prouver que f et g sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad g(t) = tf'(t)$.
2. Montrer que g est prolongeable par continuité en 0 et que le prolongement (encore noté g) est dérivable en 0.
3. Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}^+$, puis en tracer un graphe (on donne $e^{-1} = 0.36$ à 10^{-2} près).
4. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1 de la fonction $t \mapsto g\left(\frac{1}{t}\right)$
   (a) Calculer H
   (b) Former un développement limité de H à l'ordre 3 au voisinage de 1.
5. Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel. On introduit l'équation (E_n) : $f(t) = \frac{t}{n}$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$
   (a) En utilisant la question 3, montrer que (E_n) a une unique solution α_n dans $]0, 1[$.
   Montrer de même que (E_n) a une unique solution dans $]1, +\infty[$, que l'on notera β_n.
   (b) Montrer que les suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ sont monotones.
   (c) Est-il possible que l'une de ces deux suites converge vers une limite $\ell > 0$? En déduire leurs limites.

PARTIE B : Fonctions définies par des intégrales

On prolonge maintenant f à $\mathbb{R}^+$ en posant $f(0) = 0$

6. Montrer que l'application f ainsi prolongée est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$; préciser $f'(0)$ et montrer que l'égalité de la question 1 de la partie A reste valable pour $t = 0$.
7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note :
$$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{et} \quad G(x) = \int_0^x g(t)\,dt$$
Ces intégrales existent car les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}^+$
   (a) Montrer que $F(x) = x \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) - G(x)$
   (b) Montrer que pour tout $x \geqslant 1$, $0 \leqslant G(x) \leqslant \ln(x) + C$ où $C = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt$
   (c) En déduire que $G(x)$ est négligeable devant x au voisinage de $+\infty$.
   (d) Déterminer un équivalent simple de $F(x)$ au voisinage de $+\infty$.
8. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle (E) : $x^2y' + y = x^2$. L'expression générale de la solution fera apparaitre la fonction F

PARTIE C : Etude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application y solution de (E) : $x^2y' + y = x^2$ cette fois sur $\mathbb{R}^+$ et on suppose que y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. Nous allons, *sans aucun calcul explicite de* y, déterminer entièrement la suite des $u_n = y^{(n)}(0)$ à partir de l'équation (E).

9. Que vaut $u_0 = y(0)$?
10. En dérivant (E), calculer $u_1 = y'(0)$ puis $u_2 = y''(0)$.
11. Peut-on avoir y de la forme : $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$?
12. Soit n un entier naturel.
   (a) On suppose ici $n \geqslant 3$. Prouver à l'aide de la formule de Leibniz que, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$:
$$x^2y^{(n+1)}(x) + (1 + 2nx)\,y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0$$
   En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.
   (b) Donner une expression de u_n en fonction de n en utilisant une factorielle, valable pour tout $n \geqslant 2$

PROBLEME II :

PARTIE I :

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

1. Déterminer l'ensemble de définition D de f.
2. Montrer que f admet en 0 un prolongement par continuité. On précisera par quelle valeur f est alors prolongée et on continuera à appeler f le prolongement ainsi obtenu. On appellera D' le nouvel ensemble de définition de f .
3. f est-elle dérivable en 0 ? Si oui, préciser $f'(0)$.
Calculer $f'(x)$ sur D puis prouver que f est de classe C^1 sur D'.
4. Etudier les variations de f. On dressera son tableau de variations.
On pourra utiliser la fonction auxiliaire k définie par : $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.

PARTIE II :

Dans la suite, on s'intéressera à l'intégrale suivante $\int_0^1 f(t)\,dt$.

On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur.

Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes

$P_n(X) = X - \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}X^k}{k}$

et $Q_n(X) = X - \frac{X^2}{2^2} + \frac{X^3}{3^2} - \frac{X^4}{4^2} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{X^n}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}X^k}{k^2}$

5. Justifier : $\forall t \in [0,1]\,,\quad 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \frac{1-(-1)^n t^n}{1+t}$
6. En déduire : $\forall x \in [0,1]\,,\quad P_n(x) = \ln(1+x) - \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt.$

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]\,,\quad R_n(x) = \int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt.$

7. Etablir la majoration : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]\,,\quad |R_n(x)| \leqslant \frac{x^{n+1}}{n+1}$
8. Comparer pour tout $x \in]0,1]$: $Q_n'(x)$ et $\frac{P_n(x)}{x}$
9. En notant , g_n l'application définie pour tout $x \in]0,1]$ par $g_n(x) = \frac{P_n(x)}{x} - \frac{\ln(1+x)}{x}$ et $g_n(0) = 0$, montrer :
$$|Q_n(1) - L| \leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leqslant \frac{1}{(n+1)^2}$$
En déduire $\lim_{n\to+\infty} Q_n(1)$
10. Déterminer un entier naturel N tel que $Q_N(1)$ donne une valeur approchée de L à 10^{-4} près.

PARTIE III :

On s'intéresse à présent aux dérivées successives de f que l'on note $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

11. Montrer que f est indéfiniment dérivable $]0,+\infty[$
12. Calculer , $f''(x)$ sur $]0,+\infty[$.
13. Montrer que pour tout entier naturel n non nul il existe un polynôme T_n à coefficients réels et un réel a_n tels que :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\quad f^{(n)}(x) = \frac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \frac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$$
14. Montrer que tous les coefficients de T_n sont des entiers.
15. En utilisant la formule de Leibniz calculer $f^{(n)}(x)$ et en déduire la valeur de T_n.
On ne cherchera pas à expliciter une expression de chacun des coefficients de x^k ($k \in \mathbb{N}$) de ce polynôme
Vérifier cette expression pour $n = 2$

EXERCICE : Différence symétrique

On considère un ensemble E non vide. Pour A et B deux parties de E, on considère l'ensemble : $A\Delta B = (A\cup B)\setminus(A\cap B)$. On rappelle que si $C\in\mathscr{P}(E)$, la fonction indicatrice de C est notée $\mathbb{1}_C$

1. Connaissant les fonctions indicatrices des intersections, des réunions et des complémentaires, on a : $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_{A\cup B}(1-\mathbb{1}_{A\cap B}) = (\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)(1-\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B)$. Ainsi, comme les fonctions indicatrices sont égales à leurs carrés, on a : $\mathbb{1}_{A\Delta B} = \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = (\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2$ i.e. $\boxed{\mathbb{1}_{A\Delta B} = (\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_B)^2}$
2. On calcule de même la fonction indicatrice de $(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$:
$\mathbb{1}_{(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)} = \mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_B)+\mathbb{1}_B(1-\mathbb{1}_A)-\mathbb{1}_A(1-\mathbb{1}_B)\mathbb{1}_B(1-\mathbb{1}_A) = \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\Delta B}$.
Or les fonctions indicatrices caractérisent les parties donc
$\boxed{\textbf{pour tout couple } (A,B) \textbf{ de parties de } E\textbf{, on a : } A\Delta B = (A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)}$
3. Soit $(A,B,C)\in(\mathscr{P}(E))^3$. On calcule les fonctions indicatrices de $(A\Delta B)\Delta C$ et de $A\Delta(B\Delta C)$. On a : $\mathbb{1}_{(A\Delta B)\Delta C} = (\mathbb{1}_{A\Delta B}-\mathbb{1}_C)^2 = \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C+4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$ et de même $\mathbb{1}_{A\Delta(B\Delta C)} = (\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_{B\Delta C})^2 = \mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B+\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B-2\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C-2\mathbb{1}_A\mathbb{1}_C+4\mathbb{1}_A\mathbb{1}_B\mathbb{1}_C$. Ainsi
$\boxed{(A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C) \textbf{ : la différence symétrique est associative}}$.
4. Par analyse-synthèse, montrons $\exists! X_0\in\mathscr{P}(E)|\forall A\in\mathscr{P}(E),\ A\Delta X_0 = A = X_0\Delta A$.
<u>Analyse</u> : Si une telle partie X_0 existe.
Alors pour toute partie A de E, on a : $\mathbb{1}_{A\Delta X_0} = \mathbb{1}_A$ i.e. $(\mathbb{1}_A-\mathbb{1}_{X_0})^2 = \mathbb{1}_A$. En particulier avec la partie $A=\emptyset$ dont la fonction indicatrice est nulle, on a : $\mathbb{1}_{X_0}^2 = 0$ i.e. $X_0=\emptyset$
<u>Synthèse</u> : Soit $X_0=\emptyset$.
Pour toute partie A de E, on a : $\mathbb{1}_{A\Delta X_0} = \mathbb{1}_A^2 = \mathbb{1}_A$. Donc $A\Delta X_0 = A$. Et par commutativité de Δ, on a aussi $A = X_0\Delta A$.
Ainsi $\boxed{\textbf{il existe une unique partie de } E\textbf{, } X_0=\emptyset \textbf{ telle que : } \forall A\in\mathscr{P}(E),\ A\Delta X_0 = A = X_0\Delta A}$
5. Par analyse-synthèse, on montre : $\boxed{\forall A\in\mathscr{P}(E), \exists! A'\in\mathscr{P}(E)\ \big|\ A\Delta A' = X_0 = A'\Delta A \quad \textbf{et } A' = A}$

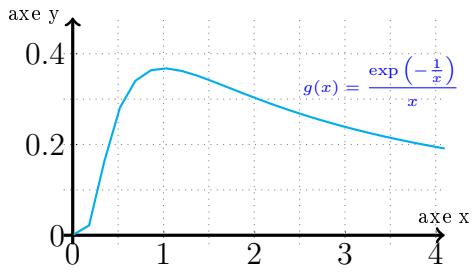
PROBLEME I :

Soit $f(t) = \exp\left(-\dfrac{1}{t}\right)$ et $g(t) = \dfrac{f(t)}{t}$

PARTIE A : Généralités

1. f est la composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$: $t\mapsto -\dfrac{1}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exp sur $\mathbb{R}$.
Donc $\boxed{f \textbf{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \textbf{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.
g est le quotient de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $\boxed{g \textbf{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \textbf{ sur } \mathbb{R}_+^*}$.
On dérive f : $\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ f'(t) = \dfrac{1}{t^2}\exp\left(-\dfrac{1}{t}\right) = \dfrac{f(t)}{t^2}$. Donc $\boxed{\forall t\in\mathbb{R}_+^*,\ g(t) = tf'(t)}$.
2. Par croissance comparée $\displaystyle\lim_{t\to0^+}\frac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t} = 0$.
Donc $\boxed{g \textbf{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } g(0)=0}$. De plus, toujours par croissance comparée, $\dfrac{g(t)-g(0)}{t-0} = \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t^2} \underset{t\to0^+}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\boxed{g \textbf{ est dérivable en 0 et } g'(0)=0}$
.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0



3. On a pour $t > 0$: $g'(t) = \dfrac{(1-t)f(t)}{t^3}$ ce qui est du signe de $1-t$. On en déduit le tableau de variation : (la limite en 0 de $g'(t)$ s'obtient par comparaison des puissances et des exponentielles ainsi que celle en $+\infty$ de g)

4. Soit H la primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ s'annulant en 1 de la fonction $t \mapsto g\left(\dfrac{1}{t}\right)$

   (a) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $H(x) = \displaystyle\int_1^x t\,e^{-t}\,dt$. Donc en intégrant par parties, on obtient : $\boxed{H(x) = 2e^{-1} - (x+1)e^{-x}}$

   (b) En utilisant le résultat sur le produit et la somme de DL, on a : $\boxed{H(1+u) \underset{u\to 0^+}{=} \dfrac{u}{e} - \dfrac{1}{6e}u^3 + \circ\left(u^3\right)}$.

5. Soit $n \geqslant 3$ un entier naturel. On introduit l'équation (E_n) : $f(t) = \dfrac{t}{n}$ d'inconnue $t \in \mathbb{R}_+^*$

   (a) On remarque qu'en divisant par t l'équation (E_n) devient : $g(t) = \dfrac{1}{n}$. Or à la question 3, on a montré :
   — g continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0,1[$
   — $\lim\limits_{0^+} g = 0$, $\lim\limits_{1^-} g = \dfrac{1}{e}$

   Ainsi par le théorème d'homéomorphisme, g est une bijection de $]0,1[$ vers $\left]0, \dfrac{1}{e}\right[$. Or comme $n \geqslant 3 > e$, on a $\dfrac{1}{n} \in \left]0, \dfrac{1}{e}\right[$. Donc $\boxed{\textbf{il existe un unique } \alpha_n \in]0,1[\textbf{ solution de } (E_n)}$.
   De même $\boxed{\textbf{il existe un unique } \beta_n \in]1,+\infty[\textbf{ solution de } (E_n)}$.

   (b) Soit $n \geqslant 3$. On a $g(\alpha_{n+1}) = \dfrac{1}{n+1} < \dfrac{1}{n} = g(\alpha_n)$. Comme α_n et α_{n+1} sont dans $]0,1[$ intervalle sur lequel g est croissante, on en déduit : $\alpha_{n+1} < \alpha_n$. Ainsi $\boxed{(\alpha_n)_{n\geqslant 3} \textbf{ est décroissante}}$. De même $\boxed{(\beta_n)_{n\geqslant 3} \textbf{ est croissante}}$.

   (c) On note $(u_n)_{n\geqslant 3}$ une quelconque de ces suites.
   — Supposons par l'absurde que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge vers $\ell > 0$. En passant à la limite dans la relation $g(u_n) = \dfrac{1}{n}$, on a par continuité de g en ℓ, $g(\ell) = 0$ ce qui contredit $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, g(t) > 0$.
   $\boxed{\textbf{il est impossible que l'une de ces deux suites converge vers une limite } \ell > 0}$
   — La suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante et minorée par 0. Donc elle converge vers une limite $\ell \geqslant 0$. Or cette limite ne peut pas être strictement positive dans le point précédent, donc $\boxed{(\alpha_n)_{n\geqslant 3} \textbf{ converge vers } 0}$
   — La suite $(\beta_n)_{n\geqslant 3}$ est croissante et minorée par 1. Donc soit elle diverge vers $+\infty$ soit elle converge vers un réel $\ell \geqslant 1$. Or elle ne peut pas converger vers un réel strictement positif d'après le point précédent, donc $\boxed{(\beta_n)_{n\geqslant 3} \textbf{ diverge vers } +\infty}$

PARTIE B : Fonctions définies par des intégrales

On prolonge maintenant f à $\mathbb{R}^+$ en posant $f(0) = 0$

6. — f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et $f(t) \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0 = f(0)$. Ainsi f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   — f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   — Par croissance comparée, $f'(t) = \dfrac{\exp\left(-\frac{1}{t}\right)}{t^2} \underset{t\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ qui est une limite finie.

   Ainsi par théorème de classe $\mathscr{C}^1$ par prolongement, $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } f'(0) = 0}$.

   On remarque alors en reprenant l'égalité de la question 1 que $\boxed{\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g(t) = tf'(t)}$

7. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On note : $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\,dt$ Ces intégrales existent car les fonctions f et g sont continues sur $\mathbb{R}^+$
   (a) En intégrant $F(x)$ par parties et en utilisant $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ g(t) = tf'(t)$, on obtient :
   $$\boxed{F(x) = x\exp\left(-\frac{1}{x}\right) - G(x)}$$
   (b) Soit $x \geqslant 1$. On a : $G(x) = \displaystyle\int_0^1 g(t)\,dt + \int_1^x g(t)\,dt \leqslant C + \int_1^x \frac{dt}{t}$ i.e.
   $$\boxed{\forall x \geqslant 1,\ 0 \leqslant G(x) \leqslant \ln(x) + C \text{ où } C = \int_0^1 g(t)\,dt}$$
   (c) On en déduit que : $\forall x \geqslant 1, 0 \leqslant \dfrac{G(x)}{x} \leqslant \dfrac{C}{x} + \dfrac{\ln(x)}{x}$. Ainsi par le théorème des gendarmes, $\dfrac{G(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi $\boxed{G(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x)}$.
   (d) Soit $x \geqslant 1$. On a : $\dfrac{F(x)}{x} = \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{G(x)}{x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 1$. Ainsi $\boxed{F(x) \sim x \text{ au voisinage de } +\infty}$
   .

8. Soit l'équation différentielle (E) : $x^2y' + y = x^2$.
   — <u>Equation homogène</u>. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme : $x \mapsto \lambda \exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$
   — <u>Variation de la constante</u>. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $y(x) = \lambda(x)\exp\left(\dfrac{1}{x}\right)$ avec λ dérivable. On trouve alors que :
   y est solution de (E) ssi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda'(x) = f(x)$. On choisit alors $\lambda = F$.

   Ainsi les solutions de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions $\boxed{x \mapsto (A + F(x))\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) \text{ où } A \in \mathbb{R}}$

PARTIE C : Etude qualitative d'une équation différentielle

On considère maintenant une application y solution de (E) : $x^2y' + y = x^2$ cette fois sur $\mathbb{R}^+$ et on suppose que y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^+$. Nous allons, *sans aucun calcul explicite de* y, déterminer entièrement la suite des $u_n = y^{(n)}(0)$ à partir de l'équation (E).

9. Dans l'équation (E) on prend $x = 0$. On trouve $y(0) = 0$ i.e. $\boxed{u_0 = 0}$

10. — En dérivant (E) une fois, on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x^2y''(x) + (2x+1)y'(x) = 2x$. Donc en évaluant en 0, on trouve $\boxed{u_1 = 0}$
    — En dérivant deux fois (E), on trouve : $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $x^2y^{(3)}(x) + (4x+1)y''(x) + 2y'(x) = 2$. Donc en évaluant en 0, on trouve $\boxed{u_2 = 2}$

11. Par l'absurde Supposons que y de la forme : $x \mapsto \alpha x^2 + \beta x + \gamma$. D'après la question précédente, on aurait alors $\gamma = 0 = \beta$ et $\alpha = 1$ donc y serait nécessairement la fonction $x \mapsto x^2$. Or on vérifie aisément que cette fonction n'est pas solution de (E).
Ainsi $\boxed{y \text{ n'est pas un polynôme de degré inférieur ou égal à } 2}$

12. Soit n un entier naturel.

    (a) On suppose ici $n \geqslant 3$. On note h la fonction $x \mapsto x^2 y'(x)$. D'après la formule de Leibniz et en constatant que les dérivées de $x \mapsto x^2$ d'ordre $k \geqslant 3$ sont nulles, on a :
    $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $h^{(n)}(x) = x^2 y^{(n+1)}(x) + 2nxy^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x)$. Ainsi, en dérivant n fois (E) et en constatant que le second membre aura une dérivée $n-$ième nulle, on a :
    $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}^+ : x^2 y^{(n+1)}(x) + (1+2nx)\, y^{(n)}(x) + n(n-1)y^{(n-1)}(x) = 0}$.
    En évaluant la relation précédente en $x = 0$, on en déduit $\boxed{\forall n \geqslant 3,\ u_n = -n(n-1)u_{n-1}}$
    En déduire une relation de récurrence entre u_n et u_{n-1}.

    (b) En utilisant une récurrence ou le produit téléscopique $u_n = u_2 \displaystyle\prod_{k=3}^{n} \frac{u_k}{u_{k-1}} = u_2 \prod_{k=3}^{n} -k(k-1)$ (ce qui est possible car les u_k sont non nuls à partir de $k = 2$), on trouve : $\boxed{\forall n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{(-1)^n (n!)^2}{n}}$.

PROBLEME II :

PARTIE I :

On considère la fonction f définie par la relation $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$

1. $\boxed{f \text{ est définie sur } D =]-1, 0[\cup]0, +\infty[}$.

2. On a $\boxed{\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \dfrac{x^2}{2} + \circ\left(x^2\right)}$.
   Ainsi, pour $x \neq 0$, on a $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x}{2} + \circ(x)$. Donc
   $\boxed{f \text{ admet en } 0 \text{ un prolongement par continuité en posant } f(0) = 1}$. f ainsi prolongée est continue sur $D' =]-1, +\infty[$.

3. Pour $x \neq 0$, on a : $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dfrac{-\frac{x}{2} + \circ(x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2}$. Ainsi $\boxed{f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = -\dfrac{1}{2}}$
   .
   Sur D, f est de classe $\mathscr{C}^1$ comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur D, et on a : $\boxed{\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}}$.
   Par un calcul de DL, on trouve $\dfrac{x}{1+x} - \ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} -\dfrac{x^2}{2} + \circ\left(x^2\right)$. Ainsi $f'(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\dfrac{1}{2} = f'(0)$.
   Ainsi f' est continue en 0. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $D =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, on en déduit que
   $\boxed{f \text{ est de classe } \mathscr{C}^1 \text{ sur } D' =]-1, +\infty[}$

4. $\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{x - (1+x)\ln(1+x)}{(1+x)x^2} = \dfrac{k(x)}{(1+x)x^2}$ avec $k(x) = x - (1+x)\ln(1+x)$.
   Or k est dérivable sur $D' =]-1, +\infty[$ et $\forall x \in D', k'(x) = -\ln(1+x)$ qui est du signe opposé à x. Ainsi k possède un maximum global en 0. Or $k(0) = 0$ donc $\forall x \in D', k(x) \leqslant 0$ avec égalité

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$		$-$		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

uniquement en 0. **On en déduit que f est décroissante sur D'**

PARTIE II :

Soit $L = \displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt$.

On notera L la valeur de cette intégrale mais on ne cherchera pas à calculer cette valeur.

Pour tout entier naturel n non nul on définit les polynômes

$$P_n(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}X^k}{k} \qquad \text{et} \qquad Q_n(X) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}X^k}{k^2}$$

5. D'après l'expression de la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison différente de 1, on a $\boxed{\forall t \in [0,1], \quad 1 - t + t^2 - t^3 + \cdots + (-1)^{n-1}t^{n-1} = \dfrac{1-(-1)^n t^n}{1+t}}$

6. Soit $x \in [0,1]$. En intégrant entre 0 et x les différents membres de l'égalité précédente, on a :
$\ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt = \int_0^x \frac{1-(-t)^n}{1+t}dt = \sum_{k=0}^{n-1}\int_0^x (-1)^k t^k\,dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}$. Ainsi
$\boxed{\forall x \in [0,1], \quad P_n(x) = \ln(1+x) - \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt}$.

Dans toute la suite on notera : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad R_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{(-t)^n}{1+t}dt$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in [0,1]$. On a : $|R_n(x)| \leqslant \displaystyle\int_0^x \left|\frac{(-t)^n}{1+t}\right| dt \leqslant \int_0^x (t)^n\,dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$. Ainsi
$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1], \quad |R_n(x)| \leqslant \dfrac{x^{n+1}}{n+1}}$

8. On trouve aisément $\boxed{\forall x \in]0,1] : Q_n'(x) = \dfrac{P_n(x)}{x}}$.

9. On note g_n l'application définie pour tout $x \in]0,1]$ par $g(x) = \dfrac{P_n(x)}{x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et $g_n(0) = 0$.
D'après ce qui précéde, on a : $\forall x \in [0,1], g_n(x) = Q_n'(x) - f(x)$ (valable aussi en 0 car $\dfrac{P_n(x)}{x}$ et $f(x)$ tendent vers 1 lorsque x tend vers 0). Par ailleurs, pour $x > 0, g_n(x) = -\dfrac{R_n(x)}{x}$. Aussi :
$|Q_n(1) - L| = \left|\displaystyle\int_0^1 g_n(t)dt\right| \leqslant \int_0^1 |g_n(x)|\,dx \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{n+1}dx = \frac{1}{(n+1)^2}$. Ainsi $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n(1) = L}$

10. Pour $\boxed{n \geqslant 99}$, on a $|Q_n(1) - L| \leqslant \dfrac{1}{(n+1)^2} \leqslant \dfrac{1}{10^4}$

PARTIE III :

On s'intéresse à présent aux dérivées successives de f que l'on note $f^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}^*$

11. f est le quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,+\infty[$, donc **f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$**

12. On trouve : $\boxed{\forall x \in]0,+\infty[\,, f'(x) = \dfrac{1}{x(1+x)} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2} \text{ et } f''(x) = \dfrac{-2-3x}{x^2(1+x)^2} + \dfrac{2\ln(1+x)}{x^3}}$

13. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : "$\exists\,(T_n, a_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}\,|\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = \dfrac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$"

— $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \dfrac{1}{(1+x)x} - \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$. Donc si on pose T_1 le polynôme constant égal à 1 et $a_1 = -1$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \dfrac{T_1(x)}{(1+x)x} + a_1 \dfrac{\ln(1+x)}{x^2}$.

Donc $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ est vraie}}$

— On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a l'existence d'un polynôme T_n et d'un réel a_n tels que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = \dfrac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}$. Donc, en dérivant cette expression, on obtient :
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(x) = \dfrac{x(1+x)T_n'(x) - (2nx+n)T_n(x) + a_n(1+x)^n}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} - a_n(n+1)\dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$. Ainsi en posant T_{n+1} le polynôme défini par : $T_{n+1}(x) = x(1+x)T_n'(x) - (2nx+n)T_n(x) + a_n(1+x)^n$ et $a_{n+1} = -(n+1)a_n$, on a bien $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n+1)}(x) = \dfrac{T_{n+1}(x)}{(1+x)^{n+1}x^{n+1}} + a_{n+1}\dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+2}}$. On en déduit que $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$

— Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n \text{ est vraie}}$

i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists\,(T_n, a_n) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}\,|\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f^{(n)}(x) = \dfrac{T_n(x)}{(1+x)^n x^n} + a_n \dfrac{\ln(1+x)}{x^{n+1}}}$

14. Soit $\mathscr{P}_n$ la proposition : "T_n est à coefficients entiers et a_n est un entier"

— $\mathscr{P}_1$ est-elle vraie ? On a : $T_1 = 1$ le polynôme constant égal à 1 et $a_1 = -1$, on a bien T_1 à coefficients entiers et a_1 est entier. Donc $\boxed{\mathscr{P}_1 \text{ est vraie}}$

— On suppose que $\mathscr{P}_n$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. $\mathscr{P}_{n+1}$ est-elle vraie ?. On a T_n est à coefficients entiers et a_n est un entier. Or T_{n+1} est défini par :
$T_{n+1}(x) = x(1+x)T_n'(x) - (2nx+n)T_n(x) + a_n(1+x)^n$ ce qui est à coefficients entiers et $a_{n+1} = -(n+1)a_n$ ce qui est aussi entier. On en déduit que $\boxed{\mathscr{P}_{n+1} \text{ est vraie}}$

— Ainsi, on a montré que $\mathscr{P}_1$ est vraie et, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\mathscr{P}_n$ vraie entraine $\mathscr{P}_{n+1}$ vraie. Ainsi, par le théorème de récurrence, on en déduit que $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ \mathscr{P}_n \text{ est vraie}}$

i.e. $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ T_n \text{ est à coefficients entiers et } a_n \text{ est un entier}}$

15. On pose $\varphi : x \mapsto \ln(1+x)$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. φ et h sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

Si $k \geqslant 1, \varphi^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}\dfrac{(k-1)!}{(1+x)^k}$ et pour $p \geqslant 0, h^{(p)}(x) = (-1)^p \dfrac{p!}{x^{p+1}}$. Aussi en appliquant la formule de Leibniz, on a : $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \varphi^{(k)}(x) h^{(n-k)}(x) + \varphi(x) h^{(n)}(x)$ i.e.

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k} (-1)^{n-k} \frac{(n-k)!}{x^{n-k+1}} + \frac{(-1)^n\, n! \ln(1+x)}{x^{n+1}}.$$

Ainsi $\boxed{T_n(x) = (-1)^{n-1}\, n! \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(1+x)^{n-k}\, x^{k-1}}{k}}$

Pour $n = 2$, on a $(-1)^{2-1}\, 2! \displaystyle\sum_{k=1}^{2} \frac{(1+x)^{2-k}\, x^{k-1}}{k} = -2\,(1+x) - x = -2 - 3x = T_2(x)$