Devoir en temps libre n$^{\text{o}}$ 13

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Polynômes de Tchebychev de première espèce

On considère les polynômes P_n définis par : $P_0 = I, P_1 = X$ et la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$

PARTIE I

1. Calculer P_2, P_3, P_4
2. (a) Montrer que P_n est de degré n. Déterminer son coefficient dominant
   (b) Montrer que P_n est pair si n est pair et P_n est impair si n est impair.
   (c) Calculer $P_n(0), P_n(1)$ et $P_n(-1)$
3. (a) Montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$
   (b) Montrer que P_n est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :
   $\forall \alpha \in \mathbb{R}, P(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$
   (c) Montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, P_n(\cosh(\alpha)) = \cosh(n\alpha)$
   (d) Déterminer toutes les racines de P_n (On cherchera d'abord les racines de P_n de la forme $\cos(\alpha)$ donc se trouvant dans $[-1, 1]$, puis on montrera qu'on les a toutes trouvées)
   (e) Déterminer toutes les racines de P'_n
   (f) Montrer, en utilisant la relation de récurrence satisfaite par les P_n, que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \wedge P_{n+1} = I$
   (g) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P_n}$

PARTIE II Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $u_n = P_n(x)$

1. Ecrire, à partir de la définition de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une relation de récurrence entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n
2. En utilisant les résultats généraux sur les suites récurrentes linéaires doubles, montrer que :
   (a) si $x \in]-1, 1[$, alors $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right)$
   (b) si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, alors $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$
   (c) Que se passe-t-il si $x = \pm 1$?
3. Retrouver ces résultats à l'aide des résultats de la partie I

PARTIE III

1. Montrer que P_n est à coefficients entiers.
2. Après avoir calculer la dérivée seconde de la fonction $x \to \cos(nx)$ de deux faqns différentes, montrer que P_n satisfait l'équation différentielle :
$$\left(1 - X^2\right) P''_n(X) - XP'_n(X) + n^2 P_n(X) = 0$$
3. On note $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k X^{n-2k}$
   Calculer a_{k+1} en fonction de a_k. En déduire la valeur des a_k.
4. Donner les coefficients des polynômes P_3, P_4 et P_5.

PARTIE IV Dans cette partie, on cherche à montrer que $\dfrac{1}{3}$ est l'unique rationnel $r \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que $\cos(r\pi)$ appartienne à $\mathbb{Q}$.

À cet effet, on pose donc $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $1 \leqslant p < \dfrac{q}{2}$ (donc $q \geqslant 3$).

Dans les questions **1** à **4**, on suppose que $\cos(r\pi)$ appartient à $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ appartient à $\mathbb{Q}$ en utilisant le théorème de Bezout et la question **1** de la partie **III**.
2. Montrer que q n'est pas un multiple de 4.
3. On considère l'équation à coefficients entiers :
   $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.
   On suppose que cette équation admet une solution rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.
   Montrer que α divise a_0 et β divise a_n. En déduire que si q est impair, alors $q = 3$.
4. q peut-il être pair ?
5. Conclure.