Stage Février 2016 Du 08/02/16 au 12/02/16

Fonction logistique et aperçu du chaos

Le but du TP est l'étude du comportement de la suite logistique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n (1-u_n)$ où $\lambda \in [0,4]$.
Soit $\lambda \in [0,4]$ et soit f la fonction définie par $f(x) = \lambda x(1-x)$

Question préliminaire Montrer que $\forall x \in [0,1], f(x) \in [0,1]$. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0,1]$.

On travaillera aujourd'hui avec deux logiciels : GeoGebra et Pyzo (où on utilisera les fonctions écrites par certains d'entre vous hier...). Ouvrir ces deux logiciels.

Partie I : Suite récurrente :

1. Ouvrir le fichier 'suiterecurrenteautre.ggb' avec Geogebra. Vous avez le tracé d'une courbe et des termes successifs de la suite définie par u_0 et la fonction f.
2. Enregistrer ce fichier en ajoutant votre nom au bout du nom du fichier (avant l'extension .ggb)
3. Vous avez un curseur n permettant de faire évoluer le nombre de termes tracés. Vous avez également la possibilité de déplacer le terme u_0 en sélectionnant la flèche et faisant glisser le point d'abscisses u_0 sur l'axe. Vous avez aussi la possibilité de modifier la fonction en double-cliquant directement dessus et modifiant l'expression...
4. Effectuer quelques essais avec d'autres fonctions que celle donnée

Partie II : Suite logistique :

Il s'agit de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in [0,1]$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \lambda u_n (1-u_n)$ où $\lambda \in [0,4]$.

1. Ouvrir le fichier 'logistique.ggb' avec Geogebra. Vous avez le tracé d'une courbe et des termes successifs de la suite logistique définie avec u_0 et $\lambda = a$.
2. Enregistrer ce fichier en ajoutant votre nom au bout du nom du fichier (avant l'extension .ggb)
3. Vous avez un curseur n permettant de faire évoluer le nombre de termes tracés et un curseur a correspondant au paramètre λ. Vous avez également la possibilité de déplacer le terme u_0 en sélectionnant la flèche et faisant glisser le point d'abscisses u_0 sur l'axe. Vous avez aussi la possibilité de modifier la fonction en double-cliquant directement dessus et modifiant l'expression...
4. Effectuer quelques essais de modification des paramètres a et u_0 pour déceler une valeur a_1 de a pour laquelle :
   - ☞ Si $a < a_1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge
   - ☞ Si $a > a_1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas mais les termes successifs de la suite se rapprochent de deux valeurs. On dira que la suite possède deux *valeurs d'adhérence*
5. Effectuer quelques essais de modification des paramètres a et u_0 pour déceler une valeur a_2 de a pour laquelle :
   - ☞ Si $a_1 < a < a_2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence
   - ☞ Si $a > a_2$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède au moins 4 valeurs d'adhérence
6. Que se passe-t-il lorsque le paramètre a se rapproche de 4 ?

   Remarque : En double-cliquant sur un curseur, on peut modifier ses paramètres et lui choisir un domaine de variation plus fin ou plus approprié aux phénomènes que l'on veut observer.

Partie III : Cycles terminaux :

Dans la fin de la partie précédente, on a vu que le comportement de la suite logistique pour un paramètre λinférieur ‘a a1 était simple : la suite converge. Pour des valeurs de λ supérieures, on a l'existence de valeurs d'adhérence et, pour être plus précis, de cycles terminaux, c'est-à-dire qu'en dehors des premiers termes, les u_n vont s'approcher de suite 'presque' périodique (on parle de cycles).

1. Ouvrir le fichier 'cycleslimites.ggb' avec Geogebra. Vous avez le tracé d'une courbe et des termes successifs de la suite logistique définie avec u_0 et $\lambda = a$, mais on ne trace que les termes de rang compris entre $n - 50$ et n.
2. Enregistrer ce fichier en ajoutant votre nom au bout du nom du fichier (avant l'extension .ggb)
3. Vous avez un curseur n permettant de faire évoluer le nombre de termes tracés et un curseur a correspondant au paramètre λ. Vous avez également la possibilité de déplacer le terme u_0 en sélectionnant la flèche et faisant glisser le point d'abscisses u_0 sur l'axe. Vous avez aussi la possibilité de modifier la fonction en double-cliquant directement dessus et modifiant l'expression...
4. Vérifier l'existence de cycles pour certaines valeurs de a de longueur plus ou moins longue. On pourra également s'aider du fichier 'cycleslimitesbis.ggb' qui a un curseur supplémentaire : $nbtermes$ qui permet de faire varier le nombre de termes que l'on dessine.
5. Déterminer des valeurs pour lesquelles on trouve des cycles de longueur 2, 3, 4, 6, 8...

Partie IV : Aperçu du chaos :

Dans la fin de la partie précédente, on a vu que le comportement de la suite logistique pour un paramètre λ proche de 4 était difficilement 'prévisible' (terme impropre car justement, le comportement de la suite est entièrement déterminé, bien que difficilement exprimable simplement).
On va voir qu'il y a également une grande sensibilité aux conditions initiales. Par exemple, on va essayer de voir le comportement de u_{20} en fonction de u_0

1. Ouvrir le fichier 'u20enfonctiondeu0.ggb' avec Geogebra. Vous avez le tracé d'une courbe et des termes successifs de la suite logistique définie avec u_0 et $\lambda = a$.
2. Enregistrer ce fichier en ajoutant votre nom au bout du nom du fichier (avant l'extension .ggb)
3. Vous avez un curseur n permettant de faire évoluer le nombre de termes tracés et un curseur a correspondant au paramètre λ. Vous avez également la possibilité de déplacer le terme u_0 avec un curseur appelé Variation qui est représenté par un losange vert sur l'axe des abscisses. Un gros point rouge représente alors le terme u_{20} de la suite.
   Constater la grande sensibilité selon les écarts dans les conditions initiales.
4. Faites de même avec 'u100enfonctiondeu0.ggb'.