D.E.S.

caliofrancois

February 2016

On souhaite décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^6 - 2\,X^5 + 4\,X^4 - 5\,X^3 + 2\,X^2 + 2X}{X^5 - X^4 - X^3 + X^2}$$

Fraction irréductible

On recherche d'abord la représentation irréductible de la fraction F

Le dénominateur s'écrit sous la forme :

$$Den = (X-1)^2 \, X^2 \, (X+1)$$

On en déduit que la fraction est égale à :

$$F(X) = \frac{X^5 - 2\,X^4 + 4\,X^3 - 5\,X^2 + 2\,X + 2}{X(X+1)(X-1)^2}$$

qui est bien irréductible car le numérateur ne s'annule ni en 0, ni en 1 ni en -1

Partie entière

L'étape suivante consiste à rechercher la partie entière de la fraction $F = \dfrac{T}{Q}$ en notant

$T = X^5 - 2\,X^4 + 4\,X^3 - 5\,X^2 + 2\,X + 2$ et

$Q = X(X+1)(X-1)^2 = X^4 - X^3 - X^2 + X$.

On sait qu'il s'agit du quotient du numérateur par le dénominateur.

Partie entière

L'étape suivante consiste à rechercher la partie entière de la fraction $F = \dfrac{T}{Q}$ en notant

$T = X^5 - 2\,X^4 + 4\,X^3 - 5\,X^2 + 2\,X + 2$ et

$Q = X(X+1)(X-1)^2 = X^4 - X^3 - X^2 + X$.

On sait qu'il s'agit du quotient du numérateur par le dénominateur.

Après calcul, on trouve :

Partie entière

L'étape suivante consiste à rechercher la partie entière de la fraction $F = \dfrac{T}{Q}$ en notant
$T = X^5 - 2\,X^4 + 4\,X^3 - 5\,X^2 + 2\,X + 2$ et
$Q = X(X+1)(X-1)^2 = X^4 - X^3 - X^2 + X$.
On sait qu'il s'agit du quotient du numérateur par le dénominateur.
Après calcul, on trouve :

$$T = (X-1)Q + 4X^3 - 7X^2 + 3X + 2$$

et on écrit alors $F = X - 1 + S = X - 1 + \dfrac{P}{Q}$ avec
$P = 4X^3 - 7X^2 + 3X + 2$

Parties polaires

On décompose en éléments simples

$$S = \frac{P}{Q} = \frac{4X^3 - 7X^2 + 3X + 2}{X(X+1)(X-1)^2}$$

Le théorême de décomposition en éléments simples affirme qu'il existe 4 réels A, B, C et D tels que :

$$S = \frac{A}{X} + \frac{B}{X+1} + \frac{C}{X-1} + \frac{D}{(X-1)^2}$$

Partie polaire relative à 0

On a deux méthodes

Partie polaire relative à 0

On a deux méthodes

1. On multiplie par X puis on évalue en 0 l'expression obtenue

Partie polaire relative à 0

On a deux méthodes

1. On multiplie par X puis on évalue en 0 l'expression obtenue
   On obtient
   $$\frac{4X^3 - 7X^2 + 3X + 2}{(X+1)(X-1)^2} = A + X\ R_1$$
   où R_1 est une fraction n'ayant pas 0 pour pôle.

Partie polaire relative à 0

On a deux méthodes

1. On multiplie par X puis on évalue en 0 l'expression obtenue
   On obtient
   $$\frac{4X^3 - 7X^2 + 3X + 2}{(X+1)(X-1)^2} = A + X\ R_1$$
   où R_1 est une fraction n'ayant pas 0 pour pôle.
   Ainsi $\boxed{A = 2}$

Partie polaire relative à 0

On a deux méthodes

1. On multiplie par X puis on évalue en 0 l'expression obtenue
   On obtient

$$\frac{4X^3 - 7X^2 + 3X + 2}{(X+1)(X-1)^2} = A + X\ R_1$$

   où R_1 est une fraction n'ayant pas 0 pour pôle.
   Ainsi $\boxed{A = 2}$

2. Puisque 0 est un pole simple, on a directement la formule $A = \dfrac{P(0)}{Q'(0)} = \dfrac{2}{1}$

Partie polaire relative à -1

On a deux méthodes

Partie polaire relative à -1

On a deux méthodes

1. On multiplie par $X+1$ puis on évalue en -1 l'expression obtenue

Partie polaire relative à -1

On a deux méthodes

1. On multiplie par $X+1$ puis on évalue en -1 l'expression obtenue
   On obtient

$$\frac{4X^3 - 7X^2 + 3X + 2}{X(X-1)^2} = B + (X+1)\, R_2$$

où R_2 est une fraction n'ayant pas -1 pour pôle.

Partie polaire relative à -1

On a deux méthodes

1. On multiplie par $X+1$ puis on évalue en -1 l'expression obtenue
   On obtient
   $$\frac{4X^3-7X^2+3X+2}{X(X-1)^2}=B+(X+1)\;R_2$$
   où R_2 est une fraction n'ayant pas -1 pour pôle.
   Ainsi $\boxed{\color{red}B=3}$

Partie polaire relative à -1

On a deux méthodes

1. On multiplie par $X+1$ puis on évalue en -1 l'expression obtenue
   On obtient
   $$\frac{4X^3-7X^2+3X+2}{X(X-1)^2} = B+(X+1)\,R_2$$
   où R_2 est une fraction n'ayant pas -1 pour pôle.
   Ainsi $\boxed{B=3}$
2. Puisque -1 est un pole simple, on a directement la formule $B=\dfrac{P(-1)}{Q'(-1)}=3$

Partie polaire relative à 1

On a deux coefficients à trouver

Partie polaire relative à 1

On a deux coefficients à trouver

1. Pour D, on multiplie par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 l'expression obtenue

Partie polaire relative à 1

On a deux coefficients à trouver

1. Pour D, on multiplie par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 l'expression obtenue
   On obtient

$$\frac{4X^3-7X^2+3X+2}{X(X+1)} = D + C(X-1) + (X-1)^2 R_3$$

où R_3 est une fraction n'ayant pas 1 pour pôle.

Partie polaire relative à 1

On a deux coefficients à trouver

1. Pour D, on multiplie par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 l'expression obtenue
   On obtient

$$\frac{4X^3-7X^2+3X+2}{X(X+1)} = D + C(X-1) + (X-1)^2 R_3$$

où R_3 est une fraction n'ayant pas 1 pour pôle.
Ainsi $\boxed{D=1}$

Partie polaire relative à 1

On a deux coefficients à trouver

1. Pour D, on multiplie par $(X-1)^2$ puis on évalue en 1 l'expression obtenue
   On obtient
   $$\frac{4X^3-7X^2+3X+2}{X(X+1)} = D + C(X-1) + (X-1)^2 R_3$$
   où R_3 est une fraction n'ayant pas 1 pour pôle.
   Ainsi $\boxed{D=1}$
2. Pour C, on multiplie par X et on considère la limite en $+\infty$. On a $A+B+C=4$ et on en déduit $\boxed{C=-1}$

DES de F

La décompostion en éléments simples de la fraction

$$F = \frac{X^6 - 2\,X^5 + 4\,X^4 - 5\,X^3 + 2\,X^2 + 2X}{X^5 - X^4 - X^3 + X^2}$$ est

$$\boxed{F = X - 1 + \frac{1}{(X-1)^2} - \frac{1}{(X-1)} + \frac{2}{X} + \frac{3}{(X+1)}}$$