MPSI 15-16 Feuille n° 18 : Espaces vectoriels

Du 24/02/16 au 04/03/16

Exercice 1.

1. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère $F=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x=y=z\right\}$ et $G=\left\{\begin{pmatrix}0\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, (y,z)\in\mathbb{R}^2\right\}$.
   F et G sont-ils des sous-espaces supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?
2. Dans $\mathbb{R}^3$, trouver un supplémentaire de $\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$. Est-ce le seul ?

Exercice 2. Déterminer les $\mathbb{R}$-espaces vectoriels parmi les exemples suivants :

1. {polynomes de degré n}
2. {polynomes de degré $\leqslant n$}
3. {applications de $[0,1]$ vers $\mathbb{R}$}
4. {applications de $[0,1]$ vers $\mathbb{Q}$}
5. $\left\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, f(1)=0\right\}$
6. $\left\{f\in\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \,\middle|\, f(0)=1\right\}$
7. $\{0\}\bigcup\left\{z\in\mathbb{C} \,\middle|\, \arg(z)=\theta\right\}$
8. $\left\{z\in\mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z)\geqslant 0\right\}$
9. $\mathbb{R}\bigcup i\mathbb{R}$
10. $\left\{\text{suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=4u_{n+1}-3u_n\right\}$
11. $\left\{\text{suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \,\middle|\, \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+2}=4\left(u_{n+1}\right)^2-3u_n\right\}$

Exercice 3. Soient $F_1=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, x-y+z=0\right\}$, $F_2=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\right)$ et $F_3=\operatorname{vect}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}\right)$.
Montrer que : $\mathbb{R}^3=F_1\oplus F_2=F_1\oplus F_3$

Exercice 4. Soit $E=\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Soit P l'ensemble des fonctions paires, et I celui des fonctions impaires. Montrer que I et P sont des sous-espaces vectoriels de E supplémentaires.

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et A et B deux parties de E. Comparer :

1. $vect\left(A\bigcup B\right)$ et $vect(A)\bigcup vect(B)$
2. $vect\left(A\bigcap B\right)$ et $vect(A)\bigcap vect(B)$
3. $vect(vect(A))$ et $vect(A)$

Exercice 6. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. Montrer que $F\bigcup G$ est un sous-espace de E sssi $F\subset G$ ou $G\subset F$
2. En déduire que la réunion de deux sous-espaces vectoriels strictement inclus dans E est strictement incluse dans E.
3. Comparer $F+G$ et $vect\left(F\bigcup G\right)$

Exercice 7. L'ensemble $\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, 5x-y+3z=0\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$?
Même question avec $3x-2y=0$? , $(3x-2y)(5x-y+2z)=0$? , $(3x-2y)^2+(5x-y+2z)^2=0$?

Exercice 8. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $V_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ a \end{pmatrix}$ et $V_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels. Déterminer les réels a et b pour que $vect\,(V_1, V_2) = vect\,(V_3, V_4)$

Exercice 9. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs : $V_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$. Soient $V = vect\,(V_1)$ et $W = vect\,(V_2, V_3)$.
Déterminer : $V \bigcup W$, $V \bigcap W$, $V + W$. A-t-on $V + W = V + \bigoplus W$? V et W sont-ils supplémentaires ?

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit (v_1, v_2, v_3) une famille libre de vecteurs de E.

1. Montrer que $v_1 + v_2, v_1 + v_3$ et $v_2 + v_3$ sont linéairement indépendants.
2. En est-il de même pour $v_1 + v_2 + v_3, v_1 - v_2 + v_3$ et $v_1 + v_2 - v_3$?

Exercice 11. Soit (e_1, e_2, e_3) une base de l'e.v. E.

1. Montrer que $(e_1, e_2 + 2e_3, 2e_2 + e_3)$ est une base de E.
2. Déterminer l'ensemble des vecteurs de E ayant les mêmes coordonnées dans les deux bases.

Exercice 12. Dans $\mathbb{R}^4$, soit les vecteurs : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Soient $F = vect\,(u, v, w)$ et $G = vect\,(x, y)$.
Quelles sont les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \bigcap G$?

Exercice 13. Déterminer les rangs des familles (a, b, c, d) de $\mathbb{R}^4$ suivantes, et, éventuellement, donner les relations linéaires entre ces vecteurs :

1. $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $d = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$
2. $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $d = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$
3. $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $d = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 14. Soient $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Compléter cette famille en une base de $\mathbb{R}^4$

Exercice 15. Dans les cas suivants, déterminer si F et G sont des sous-espaces supplémentaires :

1. $E = \mathbb{R}^4$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x + y = z \text{ et } y + z + t = 0 \right\}$ et $G = \text{vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$
2. $E = \mathbb{R}^3$, $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + z = 0 \text{ et } x - 2y + z = 0 \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x = 0 \right\}$

Exercice 16. Soit $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient $f_1 : x \to 1$, $f_2 : x \to x$, $f_3 : x \to x^2$ et $f_3 : x \to e^x$. Montrer que ces quatre vecteurs de E forment une famille libre

Exercice 17. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Soit $(a_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ un système de n réels deux à deux distincts. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on note P_k le polynôme : $P_k = \prod\limits_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \left(\dfrac{X - a_j}{a_k - a_j} \right)$.

1. Pour $(i, k) \in [\![1, n]\!]^2$, calculer $P_k(a_i)$
2. Montrer que $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de E.
3. Soit $Q \in E$. Déterminer les composantes de Q dans la base $(P_k)_{1 \leqslant k \leqslant n}$

Exercice 18. Soit (x, y, z) une famille libre du $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Soient $u = x + y$, $v = y + z$ et $w = x + z$. Montrer que (u, v, w) est une famille libre.

Exercice 19. Trouver une base de $\mathbb{R}^4$ contenant $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 20. Dans $\mathbb{R}^4$, soit les vecteurs : $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$, $z = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $t = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Soient $F = vect\,(u, v, w)$ et $G = vect\,(z, t)$.
Quelles sont les dimensions de F, G, $F + G$ et $F \bigcap G$?

Exercice 21. Soit $E = \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Soient (f_1, f_2, f_3) définies par :
$\forall x \in \mathbb{R} : f_1(x) = \sin(x + 1) \quad , \quad f_2(x) = \sin(x + 2) \quad , \quad f_3(x) = \sin(x + 3)$.
Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une famille liée.

Exercice 22. Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3 \,\middle|\, x + y = z \text{ et } x + iy - z = 0 \right\}$ est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^3$. En déterminer une base.

Exercice 23. Déterminer le rang du système de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et éventuellement les relations entre les vecteurs :
$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $c = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Exercice 24. Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_a : x \to \exp(ax)$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre

Exercice 25. Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^+$, on considère la fonction $f_a : x \to \mathrm{ch}(ax)$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}^+}$ est une famille libre

Exercice 26. Dans $E = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_a : x \to \Big|x - a\Big|$. Montrer que la famille $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est une famille libre

Exercice 27. Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) < \deg(P_{n+1})$.

1. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E
2. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de E si et seulement si : $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$

Exercice 28. Soit F_1, F_2, F_3 trois sev de E. Montrer que $F_1 + F_2 + F_3$ est une somme directe si et seulement si : $F_1 \bigcap F_2 = \{0_E\}$ et $(F_1 + F_2) \bigcap F_3 = \{0_E\}$. Généraliser.

Exercice 29. Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$, et $F = \Big\{P \in E \Big| \, P(0) = P(1) = P(2) = 0\Big\}$,
$G = \Big\{P \in E \Big| \, P(1) = P(2) = P(3) = 0\Big\}$ et $H = \Big\{P \in E \Big| \, P(-X) = P(X)\Big\}$.

1. Montrer que : $F \oplus G = \Big\{P \in E \Big| \, P(1) = P(2) = 0\Big\}$
2. Montrer que : $F \oplus G \oplus H = E$