Devoir en temps libre n^{o} 13

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Polynômes de Tchebychev de première espèce

On considère les polynômes P_n définis par : $P_0 = I, P_1 = X$ et la relation de récurrence :

$\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$

PARTIE I

1. Calculer P_2, P_3, P_4
2. (a) Montrer que P_n est de degré n. Déterminer son coefficient dominant
   (b) Montrer que P_n est pair si n est pair et P_n est impair si n est impair.
   (c) Calculer $P_n(0), P_n(1)$ et $P_n(-1)$
3. (a) Montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$
   (b) Montrer que P_n est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant :
   $\forall \alpha \in \mathbb{R}, P(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$
   (c) Montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \mathbb{R}, P_n(\cosh(\alpha)) = \cosh(n\alpha)$
   (d) Déterminer toutes les racines de P_n (On cherchera d'abord les racines de P_n de la forme $\cos(\alpha)$ donc se trouvant dans $[-1, 1]$, puis on montrera qu'on les a toutes trouvées)
   (e) Déterminer toutes les racines de P_n'
   (f) Montrer, en utilisant la relation de récurrence satisfaite par les P_n, que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, P_n \wedge P_{n+1} = I$
   (g) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{P_n}$

PARTIE II Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $u_n = P_n(x)$

1. Ecrire, à partir de la définition de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une relation de récurrence entre u_{n+2}, u_{n+1} et u_n
2. En utilisant les résultats généraux sur les suites récurrentes linéaires doubles, montrer que :
   (a) si $x \in]-1, 1[$, alors $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right)$
   (b) si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$, alors $u_n = \dfrac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$
   (c) Que se passe-t-il si $x = \pm 1$?
3. Retrouver ces résultats à l'aide des résultats de la partie I

PARTIE III

1. Montrer que P_n est à coefficients entiers.
2. Après avoir calculer la dérivée seconde de la fonction $x \to \cos(nx)$ de deux faoņs différentes, montrer que P_n satisfait l'équation différentielle :
$$\left(1 - X^2\right) P_n''(X) - XP_n'(X) + n^2 P_n(X) = 0$$
3. On note $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k X^{n-2k}$
   Calculer a_{k+1} en fonction de a_k. En déduire la valeur des a_k.
4. Donner les coefficients des polynômes P_3, P_4 et P_5.

PARTIE IV Dans cette partie, on cherche à montrer que $\dfrac{1}{3}$ est l'unique rationnel $r \in \left]0, \dfrac{1}{2}\right[$ tel que $\cos(r\pi)$ appartienne à $\mathbb{Q}$.

À cet effet, on pose donc $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $1 \leqslant p < \dfrac{q}{2}$ (donc $q \geqslant 3$).

Dans les questions **1** à **4**, on suppose que $\cos(r\pi)$ appartient à $\mathbb{Q}$.

1. Montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{q}\right)$ appartient à $\mathbb{Q}$ en utilisant le théorème de Bezout et la question **1** de la partie **III**.
2. Montrer que q n'est pas un multiple de 4.
3. On considère l'équation à coefficients entiers :
   $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.
   On suppose que cette équation admet une solution rationnelle $\dfrac{\alpha}{\beta}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.
   Montrer que α divise a_0 et β divise a_n. En déduire que si q est impair, alors $q = 3$.
4. q peut-il être pair ?
5. Conclure.

CORRECTION

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 13

CORRIGE : Polynômes de Tchebychev de première espèce

On considère les polynômes P_n définis par : $P_0 = I$, $P_1 = X$ et la relation : $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_{n+2} = 2\,X\,P_{n+1} - P_n$.

PARTIE I

1) Calculer P_2 , P_3 , P_4

$P_0 = I$, $P_1 = X$, $\mathbf{P_2 = 2\,X^2 - 1}$, $\mathbf{P_3 = 4\,X^3 - 3\,X}$ **et** $\mathbf{P_5 = 8\,X^4 - 8\,X^2 + 1}$

2) **a)** Montrer que P_n est de degré n. Déterminer son coefficient dominant.

Soit R_n la propriété de récurrence : " P_n est de degré n, P_{n+1} est de degré n + 1 et le coefficient dominant de P_{n+1} est 2^n "

- R_0 vraie ? On a : P_0 de degré 0 et P_1 de degré 1 et de coefficient dominant $1 = 2^0$ **Ainsi R_0 est vraie**
- Si R_n est vraie, R_{n+1} est-elle également vraie ? On a : $P_{n+2} = 2\,X\,P_{n+1} - P_n$.
  Ainsi, puisque R_n est vraie, P_n est de degré n, P_{n+1} de degré n + 1 et $2X\,P_{n+1}$ est de degré n + 2.
  Aussi P_{n+2} est de degré n + 2
  D'autre part, le terme de degré n + 2 dans P_{n+2} provient uniquement de $2X\,P_{n+1}$: il est donc égal au double du coefficient de degré n + 1 de P_{n+1} . Ainsi le coefficient dominant de P_{n+2} vaut 2×2^n c'est-à-dire 2^{n+1}.
  Ainsi R_{n+1} est vraie
- Ainsi on a montré que R_0 est vraie et que, si R_n vraie, R_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, R_n vraie** .

En particulier, pour tout entier naturel n, P_n est de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1} si $n\geq 1$, et 1 si n = 0

b) Montrer que P_n est pair si n est pair et P_n est impair si n est impair

Soit R_p la propriété de récurrence : " P_{2p} est pair et P_{2p+1} est impair "

- R_0 vraie ? On a : $P_0 = I$ pair et $P_1 = X$ impair. **Ainsi R_0 est vraie**
- Si R_p est vraie, R_{p+1} est-elle également vraie ? On a : P_{2p} pair et P_{2p+1} impair
  Puisque $P_{2p+2} = 2\,X\,P_{2p+1} - P_{2p}$ et que $2X\,P_{2p+1}$ et P_{2p} sont pairs, le polynôme P_{2p+2} est également pair .
  Puisque $P_{2p+3} = 2\,X\,P_{2p+2} - P_{2p+1}$ et que $2X\,P_{2p+2}$ et P_{2p+1} sont impairs, le polynôme P_{2p+3} est également impair .
  Ainsi R_{p+1} est vraie
- Ainsi on a montré que R_0 est vraie et que, si R_p vraie, R_{p+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall p\in\mathbb{N}$, R_p vraie**.

En particulier, pour tout entier naturel n, P_n est de la parité de n

c) Calculer $P_n(0)$, $P_n(1)$ et $P_n(-1)$

Soit R_p la propriété de récurrence : " $P_{2p}(0) = (-1)^p$ et $P_{2p+1}(0) = 0$ "

- R_0 vraie ? On a : $P_0 = I$ donc $P_0(0) = 1 = (-1)^0$ et $P_1 = X$ donc $P_1(0) = 0$. **Ainsi R_0 est vraie**
- Si R_p est vraie, R_{p+1} est-elle également vraie ? On a : $P_{2p}(0) = (-1)^p$ et $P_{2p+1}(0) = 0$
  Puisque $P_{2p+2} = 2\,X\,P_{2p+1} - P_{2p}$, on a $P_{2p+2}(0) = -P_{2p}(0) = -(-1)^p = (-1)^{p+1}$.
  Puisque $P_{2p+3} = 2\,X\,P_{2p+2} - P_{2p+1}$, on a $P_{2p+3}(0) = -P_{2p+1}(0) = 0$. **Ainsi R_{p+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que R_0 est vraie et que, si R_p vraie, R_{p+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall p\in\mathbb{N}$, R_p vraie** . **Ainsi, si n est impair, $P_n(0) = 0$ et, si n pair, $P_n(0) = \left(-1\right)^{\frac{n}{2}}$**

Soit S_n la propriété de récurrence : " $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, $P_{n+1}(1) = 1$ et $P_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$ "

- S_0 vraie ? On a : $P_0 = I$ donc $P_0(1) = 1$ et $P_0(-1) = 1 = (-1)^0$. D'autre part $P_1 = X$ donc $P_1(1) = 1$ et $P_1(-1) = -1 = (-1)^1$. **Ainsi S_0 est vraie**
- Si S_n est vraie, S_{n+1} est-elle également vraie ? On a : $P_n(1) = 1$, $P_n(-1) = (-1)^n$, $P_{n+1}(1) = 1$ et $P_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$
  Puisque $P_{n+2} = 2\,X\,P_{n+1} - P_n$, on a $P_{n+2}(1) = 2\,P_{n+1}(1) - P_n(1) = 2 - 1 = 1$.
  De même, on a : $P_{n+2}(-1) = -2\,P_{n+1}(-1) - P_n(-1) = 2(-1)^{n+2} - (-1)^n = (-1)^{n+2}$
  Ainsi, puisqu'on a encore $P_{n+1}(1) = 1$ et $P_{n+1}(-1) = (-1)^{n+1}$, **S_{n+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que S_0 est vraie et que, si S_n vraie, S_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, S_n vraie .** **Ainsi, $\forall$ $n\in\mathbb{N}$, $P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$**

3) **a)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $P_n(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Soit R_n la propriété de récurrence : " $P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ et $P_{n+1}(\cos\alpha) = \cos((n+1)\alpha)$ "

- R_0 vraie ? On a : $P_0 = I$ donc $P_0(\cos\alpha) = 1 = \cos(0\alpha)$ et $P_1 = X$ donc $P_1(\cos\alpha) = \cos\alpha$. **Ainsi R_0 est vraie**
- Si R_n est vraie, R_{n+1} est-elle également vraie ? On a : $P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ et $P_{n+1}(\cos\alpha) = \cos((n+1)\alpha)$

Puisque $P_{n+2} = 2\,X\,P_{n+1} - P_n$, on a $P_{n+2}(\cos\alpha) = 2\cos(\alpha)\,P_{n+1}(\cos\alpha) - P_n(\cos\alpha) = 2\cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha)$.
Or : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\cos(x + y) + \cos(x - y) = 2\cos(x)\cos(y)$. En appliquant cette formule à $x = (n+1)\alpha$ et $y = \alpha$, on obtient :
$2\cos(\alpha)\cos((n+1)\alpha) - \cos(n\alpha) = \cos((n+2)\alpha)$ Donc on obtient : $P_{n+2}(\cos\alpha) = \cos((n+2)\alpha)$
Ainsi, puisqu'on a encore $P_{n+1}(\cos\alpha) = \cos((n+1)\alpha)$, **R_{n+1} est vraie**

- Ainsi on a montré que R_0 est vraie et que, si R_n vraie, R_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, R_n vraie .** **Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$**

Ce résultat étant vrai pour tout α de $\mathbb{R}$, on obtient : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$**

b) Montrer que P_n est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall\alpha\in\mathbb{R},\ P(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$

Si $P\in\mathbb{R}[X]$ est tel que : $\forall\ \alpha\in\mathbb{R}$, $P(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$. Puisque la fonction cos est une surjection de $\mathbb{R}$ vers $[-1, 1]$, on obtient : $\forall x\in[-1, 1]$, $(P - P_n)(x) = 0$. Ainsi le polynôme $P - P_n$ possède une infinité de zéros : il s'agit donc du polynôme nul. $P = P_n$ **Ainsi P_n est l'unique polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $P(\cos(\alpha)) = \cos(n\alpha)$**

c) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N},\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\ P_n(\text{ch}(\alpha)) = \text{ch}(n\alpha)$

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. Soit R_n la propriété de récurrence : " $P_n(\text{ch}\,\alpha) = \text{ch}(n\alpha)$ et $P_{n+1}(\text{ch}\,\alpha) = \text{ch}((n+1)\alpha)$ "

- <u>R_0 vraie ?</u> On a : $P_0 = I$ donc $P_0(\text{ch}\,\alpha) = 1 = \text{ch}\,(0\alpha)$ et $P_1 = X$ donc $P_1(\text{ch}\,\alpha) = \text{ch}\,\alpha$. **Ainsi R_0 est vraie**
- <u>Si R_n est vraie, R_{n+1} est-elle également vraie ?</u> On a : $P_n(\text{ch}\,\alpha) = \text{ch}(n\alpha)$ et $P_{n+1}(\text{ch}\,\alpha) = \text{ch}((n+1)\alpha)$

  Puisque $P_{n+2} = 2\,X\,P_{n+1} - P_n$, on a $P_{n+2}(\text{ch}\,\alpha) = 2\,\text{ch}(\alpha)\,P_{n+1}(\text{ch}\,\alpha) - P_n(\text{ch}\,\alpha) = 2\,\text{ch}(\alpha)\,\text{ch}((n+1)\alpha) - \text{ch}(n\alpha)$.

  Or : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $\text{ch}(x + y) + \text{ch}(x - y) = \frac{1}{2}(e^xe^y + e^{-x}e^{-y} + e^xe^{-y} + e^{-x}e^y) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})(e^y + e^{-y}) = 2\,\text{ch}(x)\,\text{ch}(y)$.

  En appliquant cette formule à $x = (n+1)\alpha$ et $y = \alpha$, on obtient :
  $2\,\text{ch}(\alpha)\,\text{ch}((n+1)\alpha) - \text{ch}(n\alpha) = \text{ch}((n+2)\alpha)$ Donc on obtient : $P_{n+2}(\text{ch}\,\alpha) = \text{ch}((n+2)\alpha)$
  Ainsi, puisqu'on a encore $P_{n+1}(\text{ch}\,\alpha) = \text{ch}((n+1)\alpha)$, **R_{n+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que R_0 est vraie et que, si R_n vraie, R_{n+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, R_n vraie . Ainsi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n(\text{ch}\,\alpha) = \text{ch}(n\alpha)$**

Ce résultat étant vrai pour tout α de $\mathbb{R}$, on obtient : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $P_n(\text{ch}\,\alpha) = \text{ch}(n\alpha)$**

d) Déterminer toutes les racines de P_n (On montrera, en utilisant 3a, que ces racines sont distinctes, réelles, qu'elles appartiennent à [-1,1] et qu'elles s'expriment à l'aide simplement à l'aide de la fonction cos..)

D'après 3)a), on sait : $\forall k\in[\![0, n-1]\!]$, $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ est un zéro de P_n car $P_n\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right) = \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right) = 0$

Or cos est injective sur $[0, \pi]$ donc ces n zéros sont distincts 2 à 2. Mais P_n est de degré n, ainsi on a trouvé tous les zéros de P_n : **Les zéros de P_n sont tous simples et dans $[-1, 1]$: ce sont les $\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$ pour $k\in[\![0, n-1]\!]$**

e) Déterminer toutes les racines de P'_n (on prendra garde à la dérivation de la relation 3a..)

Fixons $n\in\mathbb{N}^*$. On a :
$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha)$ donc en dérivant (selon α) on obtient : $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $-\sin(\alpha)\,P_n'(\cos\alpha) = -n\sin(n\alpha)$

Aussi $\forall k\in[\![1, n-1]\!]$, $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ est un zéro de P_n' (on a enlevé le cas "k = 0" à cause du "$\sin\alpha$" devant $P_n'(\cos\alpha)$)

Or cos est injective sur $[0, \pi]$ donc ces $n - 1$ zéros sont distincts 2 à 2. Mais P_n' est de degré $n - 1$, ainsi on a trouvé tous les zéros de P_n': **Les zéros de P_n' sont tous simples et dans $[-1, 1]$: ce sont les $\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)$ pour $k\in[\![1, n-1]\!]$**

Pour n = 0, P_0' est le polynôme nul....

f) Montrer, en utilisant la relation de récurrence donnant (P_n), que $\forall n\in\mathbb{N}$, $P_n \wedge P_{n+1} = I$

Soit $D_n = \text{PGCD}(P_n, P_{n+1})$. On a $P_{n+2} = 2\,X\,P_{n+1} - P_n$ donc $D_{n+1} = D_n$. La suite $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc constante.

Aussi, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\text{PGCD}(P_n, P_{n+1}) = \text{PGCD}(P_0, P_1) = I$

g) Déterminer la décomposition en éléments simples de $\frac{1}{P_n}$

Les zéros de P_n étant simples, on a : $\displaystyle\frac{1}{P_n} = \sum_{k=0}^{n-1}\frac{A_k}{X - \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}$ avec $A_k = \dfrac{1}{P_n'\left(\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)\right)} = \dfrac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)}{n\sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)}$

<u>**PARTIE II**</u>

Soit $x\in\mathbb{R}$. Soit $u_n = P_n(x)$.

1) Ecrire, à partir de la définition de (P_n), une relation de récurrence entre u_{n+2} , u_{n+1} et u_n

On a : **$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\,x\,u_{n+1} - u_n$**

2) En utilisant les résultats généraux sur les suites récurrentes linéaires doubles, montrer que:

a) si $x\in]-1,1[$, alors $P_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right)$

On considère l'équation caractéristique (C) associée à la récurrence $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2\,x\,u_{n+1} - u_n$
On a (C) : $z^2 - 2\,x\,z + 1 = 0$ (ce sera la même équation caractéristique dans les deux cas suivants)
Le discriminant réduit de (C) vaut : $\Delta' = x^2 - 1 < 0$.
Les racines sont distinctes et valent $x + i\sqrt{1-x^2}$ et $x - i\sqrt{1-x^2}$.

On sait alors qu'il existe deux complexes (α, β) tels que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = \alpha\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \beta\left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n$

Or $u_0 = 1 = \alpha + \beta$ et $u_1 = x = \alpha\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right) + \beta\left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)$ donc $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

Donc, **si $x \in]-1, 1[$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = P_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right)$**

b) si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, $P_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$

Dans ce cas, les solutions de (C) sont $x + \sqrt{x^2-1}$ et $x - \sqrt{x^2-1}$.

On sait alors qu'il existe deux complexes (α, β) tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \beta\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n$

Or $u_0 = 1 = \alpha + \beta$ et $u_1 = x = \alpha\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) + \beta\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)$ donc $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$

Donc, **si $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = P_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$**

c) **Q**ue se passe-t-il si $x \in \{-1,1\}$?

Si $x = 1$ ou -1, alors l'équation (C) possède une racine double : x

On sait alors qu'il existe deux complexes (α, β) tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha + \beta n)\, x^n$

Or $u_0 = 1 = \alpha$ et $u_1 = x = \alpha x + \beta x$ donc $\alpha = 1$ et $\beta = 0$

Donc, **si $x \in \{-1,1\}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = P_n(x) = x^n$**

3) Retrouver ces résultats à l'aide des résultats de la partie I

- Si $x \in]-1, 1[$, il existe un réel α dans $]0, \pi[$ tel que $x = \cos\alpha$.
  Aussi, $u_n = P_n(\cos\alpha) = \cos(n\alpha) = \frac{1}{2}(e^{in\alpha} + e^{-in\alpha})$

  D'où : **$u_n = P_n(x) = \frac{1}{2}\left((\cos\alpha + i\sin\alpha)^n + (\cos\alpha - i\sin\alpha)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)^n + \left(x - i\sqrt{1-x^2}\right)^n\right)$**

- Si $x > 1$, il existe un réel positif α tel que $x = \operatorname{ch}\alpha$. Aussi, $u_n = P_n(\operatorname{ch}\alpha) = \operatorname{ch}(n\alpha) = \frac{1}{2}(e^{n\alpha} + e^{-n\alpha})$

  D'où : **$u_n = P_n(x) = \frac{1}{2}\left((\operatorname{ch}\alpha + i\operatorname{sh}\alpha)^n + (\operatorname{ch}\alpha - i\operatorname{sh}\alpha)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$**

- Si $x < -1$, il existe un réel positif α tel que $x = -\operatorname{ch}\alpha$.
  Aussi, $u_n = P_n(-\operatorname{ch}\alpha) = (-1)^n \operatorname{ch}(n\alpha) = \frac{1}{2}(-1)^n (e^{n\alpha} + e^{-n\alpha})$ D'où :

  $u_n = P_n(x) = \frac{1}{2}(-1)^n\left(\left(-x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(-x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right)$

- Si $x = -1$ ou 1. On a déjà montré dans le I 2)c) que **$P_n(1) = 1$ et $P_n(-1) = (-1)^n$**

PARTIE III 1. Soit $\mathscr{R}_n$: " P_n et P_{n+1} sont à coefficients entiers"

- ☞ $\mathscr{R}_0$ est-elle vraie ? $P_0 = I$ et $P_1 = X$ sont à coefficients entiers donc $\boxed{\mathscr{R}_0 \text{ est vraie}}$
- ☞ Supposons $\mathscr{R}_n$ vraie pour un certain entier n. $\mathscr{R}_{n+1}$ est-elle vraie ?.
  On a P_n et P_{n+1} à coefficients entiers. Donc $2XP_{n+1} - P_n$ est aussi à coefficients entiers. En particulier, P_{n+1} et P_{n+2} sont à coefficients entiers. Ainsi $\boxed{\mathscr{R}_{n+1} \text{ est vraie}}$
- ☞ On a montré que $\mathscr{R}_0$ est vraie et, pour tout entier n, $\mathscr{R}_n$ vraie entraine $\mathscr{R}_{n+1}$ vraie. Ainsi par théorême de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{R}_n$ vraie, et en particulier,
  $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, P_n \text{ est à coefficients entiers}}$

2. On pose f la fonction qui à $t \in \mathbb{R}$ associe $f(t) = P_n(\cos(t)) = \cos(nt)$. f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a d'une part :
$\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = -\cos(t)P_n'(\cos(t)) + \sin^2(t)P_n''(\cos(t))$
et d'autre part : $\forall t \in \mathbb{R}, f''(t) = -n^2 P_n(\cos(t))$.
Ainsi : $\forall t \in \mathbb{R}, n^2 P_n(\cos(t)) - \cos(t)P_n'(\cos(t)) + \sin^2(t)P_n'(\cos(t)) = 0$
En particulier, le polynôme : $n^2 P_n - XP_n' + \left(1 - X^2\right) P_n''$ s'annule en tout $\cos(t)$ donc en tout point de $[-1, 1]$ car $\cos(t)$ décrit $[-1, 1]$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$. Ainsi P_n satisfait l'équation différentielle :
$\boxed{\left(1 - X^2\right) P_n''(X) - XP_n'(X) + n^2 P_n(X) = 0}$

3. On note $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k X^{n-2k}$
On a : $P_n' = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2k)a_k X^{n-2k-1}$ et $P_n'' = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2k)(n-2k-1)a_k X^{n-2k-2}$.
Ainsi, comme $X^2 P_n'' + XP_n' - n^2 P_n = P_n''$, on en déduit :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (n-2k)(n-2k-1)a_k X^{n-2k-2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} 4k(k-n)a_k X^{n-2k}$ i.e.
$\displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} (n-2k)(n-2k-1)a_k X^{n-2k-2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1} 4(k+1)(k+1-n)a_{k+1} X^{n-2k-2}$
La famille $(X^p)_{p \in \mathbb{N}}$ étant libre, on peut identifier et on a :
$\forall k \in \left[\!\left[0, \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor - 1\right]\!\right], a_{k+1} = \dfrac{(n-2k)(n-2k-1)}{4(k+1)(k+1-n)} a_k$
En remarquant que a_0 est le coefficient dominant de P_n et en regroupant certains facteurs pour reconnaitre des factorielles, on en déduit :
$$\boxed{a_k = (-1)^k \frac{n}{n-k} 2^{n-2k-1} \binom{n-k}{k}}$$

4. En utilisant les expressions précédentes ou en reprenant la relation de récurrence, on montre :
$\boxed{P_3 = 4X^3 - 3X \text{ , } P_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1 \text{ et } P_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X}$

PARTIE IV On pose $r = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$ et $1 \leqslant p < \dfrac{q}{2}$ (donc $q \geqslant 3$).
Dans les questions **1** à **4**, on suppose que $\cos(r\pi)$ appartient à $\mathbb{Q}$.

1. $p \wedge q = 1$ donc d'après Bezout, il existe un couple (u, v) d'entiers tel que $pu + qv = 1$. Ainsi $\dfrac{\pi}{q} = \pi v + ur\pi$ donc $\cos\left(\dfrac{\pi}{q}\right) = (-1)^v P_{|u|}(\cos(r\pi))$.
Donc, puisque $\cos(r\pi) \in \mathbb{Q}$ et $P_{|u|}$ est à coefficients entiers, on a $\boxed{\cos\left(\dfrac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}}$.

2. On suppose par l'absurde que q est un multiple de 4.
On écrit q sous la forme $q = 4k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.
On a alors $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = P_k\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{q}\right)\right)$. Comme P_k est à coefficients entiers et $\cos\left(\dfrac{\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$, on en

déduit $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \in \mathbb{Q}$ i.e. $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux.

Ainsi $\boxed{q \text{ n'est pas un multiple de } 4}$.

3. On considère l'équation à coefficients entiers :
$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$ avec $a_0 \neq 0$ et $a_n \neq 0$.
On suppose que cette équation admet une solution rationnelle $\frac{\alpha}{\beta}$ avec $\alpha \wedge \beta = 1$.

   On a montré en exercice qu'alors $\boxed{\alpha \text{ divise } a_0 \text{ et } \beta \text{ divise } a_n}$.

   Si q est impair, le coefficient constant de P_q est nul. Or $P_q\left(\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right) = -1$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ est racine de $P_q + 1$ qui est à coefficients entiers, de coefficient dominant 2^{q-1} et de coefficient constant 1. Donc si $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ est rationnel de la forme $\frac{\alpha}{\beta}$ avec $\alpha\wedge\beta = 1$, on en déduit $\alpha = 1$ et $\beta = 2^k$ avec $0 \leqslant k \leqslant q-1$ car, par ailleurs, $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) > 0$. Mais alors soit $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) = 1$ ce qui est impossible, soit $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \leqslant \frac{1}{2}$.
Or $q \geqslant 3$ donc par décroissance de cos sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \geqslant \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$. En regroupant les deux inégalités, on en déduit $\cos\left(\frac{\pi}{q}\right) \leqslant \frac{1}{2}$ et $q = 3$. $\boxed{\text{si } q \text{ est impair, alors } q = 3}$.

4. Si q est pair, alors comme q n'est pas un multiple de 4, on a $q = 2k$ avec k impair et donc $k \geqslant 3$.
$\cos\left(\frac{\pi}{k}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)\right)^2 - 1 \in \mathbb{Q}$ donc, d'après la question précédente, $k = 3$.
Ainsi $q = 6$. Or $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{Q}$. Ainsi $\boxed{q \text{ ne peut pas être pair}}$

5. On a trouvé que pour que $\cos\left(\frac{p\pi}{q}\right) \in \mathbb{Q}$ avec $\frac{p}{q} \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, il fallait $q = 3$ et donc également $p = 1$.
Réciproquement $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$.

   Donc $\boxed{\frac{1}{3} \text{ est le seul rationnel } r \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ tel que } \cos(r\pi) \in \mathbb{Q}}$