Devoir en temps libre n° 14

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Espace vectoriel et équations différentielles

Soit $E = \mathscr{C}^{\infty}(]-1,1[,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur l'intervalle $]-1,1[$ à valeurs réelles.
Soit F l'ensemble des restrictions à $]-1,1[$ des fonctions polynomiales réelles.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère l'application φ de E définie par : $\forall f \in E$, $\varphi(f)$ est l'application définie par :

$$\varphi(f)(x) = \left(x^2-1\right) f''(x) + 2xf'(x)$$

.

   (a) Montrer que φ est une application de E vers E vérifiant :

$$\forall (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall (f,g) \in E^2, \varphi(\lambda f + \beta g) = \lambda\varphi(f) + \beta\varphi(g)$$

.

   (b) Montrer que l'ensemble $A = \left\{ f \in E \middle| \varphi(f) = 0_E \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   Déterminer A puis $A \bigcap F$

   (c) Montrer que F est stable par φ i.e., $\varphi(F) \subset F$

   (d) Soit $P \in F$ un polynome de degré n, avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer le monome de plus haut degré de $\varphi(P)$.

   (e) Déterminer un polynome K tel que $K(0) = 1$ et $\varphi(K) = 6K$.
   Exprimer en fonction de K les polynomes P vérifiant $\varphi(P) = 6P$.

3. On reprend le polynome K vue à la question préc{edente. On pose f l'élément de E défini par :

$$f(x) = \frac{1}{\left(x^2-1\right) K^2(x)}$$

   (a) Décomposer f en éléments simples

   (b) Calculer H la primitive de f s'annulant en 0

   (c) Montrer que K et KH sont solutions, sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :

$$\left(x^2-1\right) y'' + 2xy' - 6y = 0$$

.