Devoir en temps libre n° 14

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Espace vectoriel et équations différentielles

Soit $E = \mathscr{C}^{\infty}(]-1,1[\,,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des fonctions définies et de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur l'intervalle $]-1,1[$ à valeurs réelles.
Soit F l'ensemble des restrictions à $]-1,1[$ des fonctions polynomiales réelles.

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E.
2. On considère l'application φ définie sur E par : $\forall f \in E$, $\varphi(f)$ est l'application définie sur $]-1,1[$ par :

$$\varphi(f)(x) = \left(x^2-1\right) f''(x) + 2xf'(x)$$

.

   (a) Montrer que φ est une application de E vers E vérifiant :

$$\forall\,(\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2, \forall\,(f,g) \in E^2, \varphi\,(\lambda f + \beta g) = \lambda\varphi(f) + \beta\varphi(g)$$

.

   (b) Montrer que l'ensemble $A = \left\{ f \in E \middle| \varphi(f) = 0_E \right\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
   Déterminer A puis $A \bigcap F$

   (c) Montrer que F est stable par φ i.e., $\varphi(F) \subset F$

   (d) Soit $P \in F$ un polynome de degré n, avec $n \in \mathbb{N}$. Calculer le monome de plus haut degré de $\varphi(P)$.

   (e) Déterminer un polynome K tel que $K(0) = 1$ et $\varphi(K) = 6K$.
   Exprimer en fonction de K les polynomes P vérifiant $\varphi(P) = 6P$.

3. On reprend le polynome K vue à la question précédente. On pose f l'élément de E défini par :

$$f(x) = \frac{1}{(x^2-1)\,K^2(x)}$$

   (a) Décomposer f en éléments simples

   (b) Calculer H la primitive de f s'annulant en 0

   (c) Montrer que K et KH sont solutions, sur $]-1,1[$, de l'équation différentielle :

$$\left(x^2-1\right) y'' + 2xy' - 6y = 0$$

   (On remarquera que la fonction H n'est pas définie sur $]-1,1[$ mais KH est prolongeable sur cet intervalle et que ce prolongement est de classe $\mathscr{C}^{\infty}$)

CORRECTION

Soit $E = \mathscr{C}^\infty(]-1,1[,\mathbb{R})$, F l'ensemble des restrictions à $]-1,1[$ des fonctions polynomiales réelles.

1. ☞ F est non vide car la fonction nulle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ et c'est bien la restriction d'une fonction polynomiale.

   ☞ Soit $(f,g) \in F^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$. On note P et Q les polynomes dont f et g sont les restrictions à $]-1,1[$. Enfin on note $h = \alpha f + \beta g$. h est la restriction de $\alpha P + \beta Q$ à $]-1,1[$ donc $h \in F$

   On a donc montré que F est une partie non vide de E stable par combinaison linéaire, donc, par caractérisation des sous-espaces vectoriels, $\boxed{F \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$

2. On considère l'application φ définie sur E par : $\forall f \in E$, $\varphi(f)$ est l'application définie sur $]-1,1[$ par : $\varphi(f)(x) = \left(x^2-1\right) f''(x) + 2xf'(x)$.

   (a) On note f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]-1,1[$ par : $f_1(x) = 2x$ et $f_2(x) = x^2-1$. Ainsi, pour tout $f \in E$, $\varphi(f)$ est la fonction $\varphi(f) = f_2\, f'' + f_1\, f'$. Mais si f est de classe classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$, c'est aussi le cas de f' et de f''. Donc $\varphi(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$ comme somme et produit de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. $\boxed{\varphi \text{ est une application de } E \text{ vers } E}$.
   De plus, par linéarité de la dérivation (et la bilinéarité du produit de fonctions), φ est linéaire. Ainsi $\boxed{\varphi \text{ est un endomorphisme de } E}$

   (b) On montre directement que A est non vide (car contient l'application nulle) et stable par combinaison linéaire. Donc $\boxed{A = \left\{f \in E \middle| \varphi(f) = 0_E\right\} \text{ est un sous-espace vectoriel de } E}$.
   On pouvait aussi constater que $A = \ker(\varphi)$...
   Soit $f \in E$. Soit $g = f_2\, f'$.
   $f \in A \iff \forall t \in]-1,1[, f_2(t)\, f''(t) + f_2'(t) f'(t) = 0 \iff \forall t \in]-1,1[, g'(t) = 0$
   Donc : $f \in A \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \,\Big|\, \forall t \in]-1,1[, f'(t) = \dfrac{\lambda}{t^2-1} = \dfrac{\lambda}{2}\left(\dfrac{1}{t-1} - \dfrac{1}{t+1}\right)$
   Ainsi $\boxed{f \in A \iff \exists\,(\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, \forall t \in]-1,1[, f(t) = \dfrac{\lambda}{2}\ln\left|\dfrac{1-t}{1+t}\right| + \beta}$
   Parmi ces fonctions, les seules qui soient des restrictions de fonctions polynomiales sont les fonctions constantes : $\boxed{A \bigcap F \text{ est l'ensemble des fonctions constantes}}$

   (c) Si f est une fonction polynomiale, $\varphi(f)$ est encore polynomiale, ainsi $\boxed{F \text{ est stable par } \varphi}$

   (d) Soit $P \in F$ un polynome de degré n, avec $n \in \mathbb{N}$. On note a_n son coefficient dominant et $R = P - a_n X_n$. Par linéarité de φ, $\varphi(P) = \varphi\left(a_n X^n\right) + \varphi(R)$. Or :

   ☞ $\varphi(R)$ est de degré strictement inférieur à n

   ☞ $\varphi\left(a_n X^n\right) = n(n-1)a_n\left(X^2-1\right) X^{n-2} + 2na_n X\, X^{n-1} = n(n+1)a_n X^n - n(n-1)a_n X^{n-2}$

   Ainsi $\boxed{\varphi(P) \text{ est de degré } n \text{ et son monome de plus haut degré est } n(n+1)a_n\, X^n}$

   (e) On veut déterminer les polynomes vérifiant $\varphi(P) = 6P$. On procède par analyse-synthèse. Comme on sait que le polynome nul vérifie cette relation, on ne recherchera que les polynomes non nuls
   Analyse Soit $P \in F$ non nul tel que $\varphi(P) = 6P$. Les monomes de plus haut degré de $\varphi(P)$ et de $6P$ sont les mêmes. Donc, si on note n le degré de P et a_n le coefficient correspondant, on a : $n(n+1)a_n = 6a_n$. Ainsi $n = 2$. En écrivant P sous la forme $P = aX^2 + bX + c$, l'équation $\varphi(P) = 6P$ s'écrit alors : $6aX^2 + 2bX - 2a = 6aX^2 + 6bX + 6c$ i.e. $b = 0$ et $a = -3c$ donc $P = c\left(1-3X^2\right)$
   Synthèse Soit $c \in \mathbb{R}$ et $P = c\left(1-3X^2\right)$. On vérifie aisément que $\varphi(P) = P$.
   Ainsi les polynomes P vérifiant $\varphi(P) = 6P$ forment l'ensemble $\boxed{B = \left\{cK \middle| c \in \mathbb{R}\right\} \text{ avec } K = 1-3X^2}$
   unique polynome de B vérifiant $K(0) = 1$

3. On pose f l'élément de E défini par : $f(x) = \dfrac{1}{\left(x^2-1\right)K^2(x)}$

(a) La décomposition en éléments simples de f est :

$$\boxed{\frac{1}{(X^2-1)(3X^2-1)^2} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{X-1} - \frac{1}{X+1} - \frac{3}{\left(\sqrt{3}X-1\right)^2} - \frac{3}{\left(\sqrt{3}X+1\right)^2}\right)}$$

(b) De la DES précédente, on déduit que la primitive H de f s'annulant en 0 est la fonction définie par

$$\boxed{\forall x \in \left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[, \ H(x) = \frac{3}{4}\frac{x}{3x^2-1} + \frac{1}{8}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|}$$

(c) On sait déjà que K est solution de l'équation différentielle (E) : $\left(x^2-1\right)y'' + 2xy' - 6y = 0$. On note ϕ la fonction définie sur $\left]-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right[$ par $\phi(x) = K(x)H(x) = -\frac{3x}{4} + \frac{1-3x^2}{8}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$. Cette fonction est prolongeable sur $]-1,1[$ en une fonction de même expression et de classe $\mathscr{C}^\infty$. De plus :$\forall x \in]-1,1[, \ \phi'(x) = \frac{3x^2-2}{2(1-x^2)} - \frac{3x}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$ et $\phi''(x) = \frac{5x-3x^3}{2(1-x^2)^2} - \frac{3}{4}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|$. Avec ces expressions, on e ndéduit aisément que : $\forall x \in]-1,1[, \left(x^2-1\right)\phi''(x) + 2x\phi'(x) - 6\phi(x) = 0$. Ainsi,

$$\boxed{\textbf{K et KH sont solutions, sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle : } \left(x^2-1\right)y'' + 2xy' - 6y = 0}$$

.