Devoir en temps libre n° 15

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Équation $f^2 + f + Id = 0$

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On appelle $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de E.

PARTIE I On considère ici l'endomorphisme f de E défini par :

$f(e_1) = 2e_1 - 4e_2 + e_3$

$f(e_2) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4$

$f(e_3) = -3e_1 + 24e_2 + 5e_3 + 4e_4$

$f(e_4) = -57e_2 - 19e_3 - 12e_4$

1. (a) Calculer $f^2(e_1)$ et $f^2(e_2)$.
   Montrer que $\left(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\right)$ et $\left(e_2, f(e_2), f^2(e_2)\right)$ sont deux familles liées.
   (b) Montrer que, si $F_1 = vect(e_1, f(e_1))$ et $F_2 = vect(e_2, f(e_2))$, $E = F_1 \oplus F_2$
2. (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de E
   (b) Exprimer les coordonnées des images par f des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}'$
3. En déduire l'existence de deux réels α et β tels que : $\alpha f^2 + \beta f + Id_E = 0_{L(E)}$

PARTIE II On considère ici un endomorphisme u de E tel que : $u^2 + u + Id_E = 0_{L(E)}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in E$ non nul, la famille $(x, u(x))$ est libre dans E.
   (b) Montrer que u est un automorphisme de E et déterminer u^{-1}.
2. soit $(x, y) \in E^2$ tels que la famille $(x, y, u(x))$ soit libre.
   Montrer que la famille $(x, y, u(x), u(y))$ est une famille libre.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de E avec $f_3 = u(f_1)$ et $f_4 = u(f_2)$.

PARTIE III On considère ici un endomorphisme u de E tel que : $u^3 + u^2 + u = 0_{L(E)}$.

1. Justifier qu'il existe de tels endomorphismes de E
2. On pose $E_1 = \ker\left(u^2 + u + Id_E\right)$ et $E_2 = \ker(u)$. Montrer que : $\mathrm{Im}(u) \subset E_1$ et que E_1 et E_2 sont stables par u.
3. (a) Montrer que : $E = E_1 \oplus E_2$
   (b) Montrer que : $E_1 = \mathrm{Im}(u)$ et que $E_2 = \mathrm{Im}\left(u^2 + u + Id_E\right)$.
4. Soit u_1 la restriction de u à E_1.
   (a) Montrer que u_1 est un endomorphisme de E_1.
   (b) Calculer $u_1^2 + u_1 + Id_{E_1}$.
   (c) Montrer que :
      i. $u \neq 0 \Longrightarrow \dim(E_1) \geqslant 2$
      ii. $\dim(E_1) > 2 \Longrightarrow (\dim(E_1) = 4$ et u injective $)$