Devoir surveillé n° 8 (4 heures)

Ce devoir est constitué de deux exercices et deux petits problèmes, dont le second est 'facultatif' : les points normalement attribués à ce problème seront pondérés d'un coefficient $p = 0.6$. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.
La calculatrice n'est pas autorisée.

EXERCICE I : Polynomes de Bernstein

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note $[\![0,n]\!]$ l'ensemble des entiers allant de 0 jusqu'à n.
On appelle polynômes de Bernstein de degré n les polynômes : $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ où $k \in [\![0,n]\!]$
Dans tout l'exercice on identifie (et on appellera de la même façon) polynôme et fonction polynomiale associée

1. Représenter sur un même graphique les fonctions $x \mapsto B_{3,k}(x)$ pour $k \in [\![0,3]\!]$ et $x \in [0,1]$
2. (a) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}$. En déduire que pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leqslant B_{n,k}(x) \leqslant 1$

   (b) Pour $k \in [\![1,n]\!]$, exprimer $k\binom{n}{k}$ en fonction de $\binom{n-1}{k-1}$.

   En déduire une expression simplifiée de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, B_{n,k}$.

   (c) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, B_{n,k}$ puis $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\, B_{n,k}$
3. Exprimer $B'_{n,k}$ en fonction de $B_{n-1,k-1}$ et $B_{n-1,k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Que se passe-t-il pour $1 \leqslant n$ et $k \in [\![0,n]\!]$?
4. Établir que la famille $(B_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
5. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$.

   (a) Montrer que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \Longleftrightarrow P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$

   (b) En déduire que l'application φ est injective.

   (c) Soit $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k B_{n,k}$.

   (d) En déduire que φ est une bijection de $\mathbb{R}_n[X]$ vers lui-même.

EXERCICE II : Fractions rationnelles

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes :

1. $R_1 = \dfrac{X}{(X^2+1)(X^3-4X^2+5X-2)}$
2. $R_2 = \dfrac{1+X-X^4-X^5}{X(1+X+X^2)}$

PROBLEME I : Somme des inverses des carrés des entiers

1. (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$

   (b) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

   Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente. (on ne demande pas la valeur explicite de la limite ℓ)

2. (a) Résoudre, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'équation d'inconnue z : $(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0$.
   Combien y-a t-il de solutions ?

   (b) Vérifier que toutes les racines sont réelles et les écrire sous forme d'une cotangente.

3. (a) On considère le polynôme : $P_n = \dfrac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$.
   Quel est, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n ?
   Montrer que : $P_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{2n-2p}$ (1)

   (b) Déduire de la question 2b, que : $P_n = (2n+1)\displaystyle\prod_{k=1}^{n}\left(X^2 - \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$ (2)

   (c) En comparant le coefficient en X^{2n-2} dans (1) et (2), montrer :

   $$\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n\,(2n-1)}{3}$$

   (d) En déduire que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n\,(2n+1)}{3}$

4. (a) Montrer que : $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$

   (b) En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

   (c) En déduire la valeur de $\ell = \displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n$ (on trouvera ℓ de la forme $\ell = r\,\pi^2$ avec r un rationnel simple)

5. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $w_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $u_{2n+1} - w_n$ en fonction de u_n. En déduire la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $v_{2n} - u_{2n}$ en fonction de u_n. En déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Rappel : les points normalement attribués à ce problème sont multipliés par un coefficient $p = 0.6$

PROBLEME II : Recherche des polynômes vérifiant une équation

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On se propose de déterminer les couples (A, B) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre eux et vérifiant la relation :

$$X\left(A'B - AB'\right) + X\left(A^2 - B^2\right) + aAB = 0 \qquad (1)$$

A' et B' désignant les polynômes dérivées de A et B.

Partie I : Recherche du degré des polynômes solutions

Soit $(A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tels que $A \wedge B = I$ et vérifiant (1).

1. Établir que X divise un et un seul des deux polynômes A et B
2. Établir que A et B ont même degré et que leurs coefficients dominants sont égaux ou opposés.
3. A l'aide du thórème de Gauss, établir que si X divise B alors A divise $B - A'$. En déduire :
$$B - A' = \varepsilon A \qquad \text{avec } \varepsilon = \pm 1 \qquad (2)$$
4. Établir que, si X divise B, alors la relation (1) peut s'écrire successivement :
$$X\left(A - B'\right) + aB = \varepsilon XB \qquad (3)$$
$$X\left(2\varepsilon A' + A''\right) = a\left(\varepsilon A + A'\right) \qquad (4)$$
5. Déduire de (4) que $a = 2\ \deg(A) = 2\ \deg(B)$
6. Que dire de a si c'est A qui est divisible par X ?

Partie II : Vérification de la suffisance de ces conditions

Soit $(A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2$ non nuls vérifiant : X divise B ainsi que les relations (2) et (4). On suppose de plus que $a = 2n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

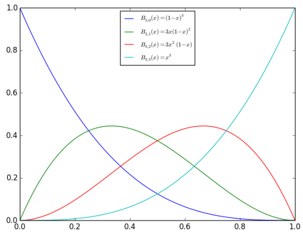
1. Montrer que, si 0 est un zéro de A d'ordre $r > 0$, alors $r = a + 1$. En déduire que $A(0) \neq 0$. Montrer par ailleurs que $B(0) = 0$
2. Montrer que pour tout entier $k \in [\![2, n]\!]$, on a :
$$XA^{(k)} = 2\varepsilon\left(n - k + 2\right)A^{(k-2)} + \left(2n - k + 2 - 2\varepsilon X\right)A^{(k-1)}$$
3. Soit D le PGCD de A et B, montrer uqe D divise $A^{(p)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire que A et B sont premiers entre eux.

Partie III : Solution du problème posé

On suppose maintenant que $a = 2n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les polynômes unitaires A de degré n vérifiant (4)
On établira pour cela une relation entre les coefficients de A et on en éduira une expression de ces coefficients en utilisant notamment des factorielles.
2. Déterminer alors tous les couples (A, B) de polynômes premiers entre eux et vérifiant (1).
3. Déterminer en particulier les couples (A, B) lorsque $n = 2$

EXERCICE I : Polynomes de Bernstein



1. $B_{n,k} = \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k}$ où $k \in [\![0, n]\!]$

2. (a) D'après la formule du binome : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n$. Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_{n,k} = 1}$.

   Par ailleurs, il est clair que $\boxed{\forall x \in [0,1]\ ,\ 0 \leqslant B_{n,k}(x)}$.

   Ainsi, $\forall x \in [0,1]\ , \leqslant B_{n,k}(x) \leqslant \displaystyle\sum_{j=0}^{n} B_{n,j}(x) = 1$ i.e. $\boxed{\forall x \in [0,1]\ ,\ 0 \leqslant B_{n,k}(x) \leqslant 1}$

   (b) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, on a : $k\binom{n}{k} = k\dfrac{n!}{k!(n-k)!} = n\dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$. Donc $\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}$

   Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, B_{n,k} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = nX \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} X^{k-1} (1-X)^{n-k} = nX \sum_{k=1}^{n} B_{(n-1),(k-1)}$.

   Ainsi $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\, B_{n,k} = nX}$.

   (c) Comme ci-dessus, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, B_{n,k} = nX \sum_{k=1}^{n} (k-1)\, B_{(n-1),(k-1)}$

   Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\, B_{n,k} = n(n-1)X^2}$.

   En regroupant les deux résultats précédents, on a :
   $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\, B_{n,k} = nX + n(n-1)X^2 = nX\,(1 + (n-1)X)}$

3. Pour $n \geqslant 1$ on a : $B'_{n,k} = k\binom{n}{k} X^{k-1} (1-X)^{n-k} - (n-k)\binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-1-k}$. Or :

   ☞ si $k = 0$: $\boxed{B'_{n,k} = -n\,(1-X)^{n-1} = -nB_{n-1,0}}$

   ☞ si $k = n$: $\boxed{B'_{n,k} = nX^{n-1} = nB_{n-1,n-1}}$

   ☞ si $0 < k < n$. On montre que : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$ et $(n-k)\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k}$.

   Ainsi $\boxed{B'_{n,k} = n\,(B_{n-1,k-1} - B_{n-1,k})}$

4. On remarque d'abord que la famille $(B_{n,k})_{0 \leqslant k \leqslant n}$ est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$. Montrons qu'il s'agit d'une famille libre.

   Soit $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \lambda_k B_{n,k} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$.

   Supposons par l'absurde que les λ_k ne sont pas tous nuls. Soit p le plus grand indice tel que $\lambda_p \neq 0$.

   On a alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k B_{n,k} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Or chaque $B_{n,k}$ de cette somme est un multiple de X^p. En simplifiant la relation par X^p, on trouve alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{p} \lambda_k \binom{n}{k} X^{k-p}(1-X)^{n-k} = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. En évaluant cela en 0, on obtient alors $\lambda_p = 0_{\mathbb{R}}$: Contradiction.

Ainsi $\forall k \in [\![0,n]\!]\ \lambda_k = 0_{\mathbb{R}}$: $\boxed{\textbf{La famille } (B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n} \textbf{ est libre}}$

La famille $(B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une famille libre de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est un espace vectoriel de dimension $n+1$, donc $\boxed{\textbf{la famille } (B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n} \textbf{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]}$

5. Pour $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $\varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$.

   (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

   $\varphi(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \iff \forall k \in [\![0,n]\!]\ P\left(\frac{k}{n}\right) = 0_{\mathbb{R}}$ car la famille $(B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ est libre. Or un polynôme de degré inférieur ou égal à n et ayant au moins $n+1$ zéro est le polynôme nul. Donc $\boxed{\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \varphi(P) = 0_{\mathbb{R}_n[X]} \iff P = 0_{\mathbb{R}_n[X]}}$

   (b) Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$ tels que $\varphi(P) = \varphi(Q)$. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} P\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k} = \sum_{k=0}^{n} Q\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$ donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (P-Q)\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}$ donc $\varphi(P-Q) = 0_{\mathbb{R}_n[X]}$. Ainsi $P = Q$: $\boxed{\varphi \textbf{ est injective}}$

   (c) Soit $(a_0, a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Comme les $\frac{k}{n}$ pour $k \in [\![0,n]\!]$ sont au nombre de $n+1$ et distincts deux à deux. Donc d'après l'interpolation de Lagrange, il existe un unique polynôme P de degré inférieur ou égal à n tel que : $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $P\left(\frac{k}{n}\right) = a_k$. Ainsi

   $\boxed{\textbf{il existe un unique } P \in \mathbb{R}_n[X] \textbf{ tel que } \varphi(P) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k B_{n,k}}$.

   (d) φ est une application injective de $\mathbb{R}_n[X]$ vers lui-même car les $B_{n,k}$ sont de degré inférieur ou égal à n. De plus, si $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on peut écrire Q sous la forme $Q = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k B_{n,k}$ car la famille $(B_{n,k})_{0\leqslant k\leqslant n}$ engendre $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, d'après le résultat précédent, on sait qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\varphi(P) = Q$: φ est surjective. Ainsi $\boxed{\varphi \textbf{ est une bijection de } \mathbb{R}_n[X] \textbf{ vers lui-même}}$

   .

EXERCICE II : Fractions rationnelles

Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$ les fractions suivantes :

1. $R_1 = \dfrac{X}{(X^2+1)(X^3-4X^2+5X-2)}$

   Dans $\mathbb{C}(X)$, $\boxed{R_1 = -\dfrac{1}{2(X-1)^2} - \dfrac{1}{2(X-1)} + \dfrac{2}{5(X-2)} + \dfrac{1+2i}{20(X+i)} + \dfrac{1-2i}{20(X-i)}}$

   Dans $\mathbb{R}(X)$, $\boxed{R_1 = -\dfrac{1}{2(X-1)^2} - \dfrac{1}{2(X-1)} + \dfrac{2}{5(X-2)} + \dfrac{X+2}{10(X^2+1)}}$

2. $R_2 = \dfrac{1+X-X^4-X^5}{X(1+X+X^2)} = 1 - X^2 + \dfrac{1-X^2}{X(1+X+X^2)}$

   Dans $\mathbb{C}(X)$, $\boxed{R_2 = 1 - X^2 + \dfrac{1}{X} - \dfrac{1}{X-j} - \dfrac{1}{X-j^2}}$. Dans $\mathbb{R}(X)$, $\boxed{R_2 = 1 - X^2 + \dfrac{1}{X} - \dfrac{2X+1}{X^2+X+1}}$

PROBLEME I : Somme des inverses des carrés des entiers

Lycée Alain Fournier MPSI 2015/2016 Le 07/03/15

CORRIGE : Sommes des inverses des carrés des entiers

1) a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$

$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} = \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{k^2 - k} \geq \frac{1}{k^2}$ car si $k \geq 2$, $k^2 \geq k^2 - k > 0$. D'où $\boldsymbol{\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2, \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}$

b) On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$: **la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante**

D'autre part, en utilisant l'inégalité de la question précédente, on a :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2$, $u_n \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 2 - \frac{1}{n} \leq 2$: **la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée par 2**

Ainsi la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc elle converge

2) a) et b) Résoudre, pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, l'équation d'inconnue z : $(z+i)^{2n+1} - (z-i)^{2n+1} = 0$ **C**ombien y a t il de solutions ? **V**érifier que toutes les racines sont réelles

On constate d'abord que i n'est pas solution de l'équation de sorte que l'on peut diviser par $(z - i)^{2n+1}$.

$(z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1} \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{2n+1} = 1 \Leftrightarrow \exists\, k \in [\![0, 2n]\!] \mid \frac{z+i}{z-i} = \omega^k$ avec $\omega = e^{\frac{2i\pi}{2n+1}}$

D'où, en constatant que le cas k = 0 n'est pas possible car $z + i \neq z - i$, on a :

$(z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1} \Leftrightarrow \exists\, k \in [\![1, 2n]\!] \mid z = i\frac{e^{\frac{ki\pi}{2n+1}} + e^{\frac{-ki\pi}{2n+1}}}{e^{\frac{ki\pi}{2n+1}} - e^{\frac{-ki\pi}{2n+1}}} \Leftrightarrow \boldsymbol{\exists\, k \in [\![1, 2n]\!] \mid z = \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$

Ces racines sont réelles et sont au nombre de 2n (rem : cotan est injective sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$)

3) a) On considère le polynôme : $P_n = \frac{1}{2i}\left((X+i)^{2n+1} - (X-i)^{2n+1}\right)$. **Q**uel est, en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$, le degré de P_n ? Montrer que $P_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p C_{2n+1}^{2p+1} X^{2n-2p}$ **(1)**

Les coefficients de degré 2n + 1 de P_n s'annulent donc $\deg(P_n) \leq 2n$.

Or le coefficient du terme de degré 2n vaut : $\frac{1}{2i}\left((2n+1)i + (2n+1)i\right) = 2n + 1 \neq 0$ **Ainsi deg (P_n) = 2n**

En utilisant la formule du binôme, on obtient :

$$P_n = \frac{1}{2i}\left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} (i)^k \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} (i)^k \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} (-i)^k \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} (-i)^k \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} \right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} (i)^k \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} (i)^k \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} (i)^k \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} (i)^k \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} \right)$$

$$= \frac{1}{i} \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} (i)^k \binom{2n+1}{k} X^{2n+1-k} = \frac{1}{i} \sum_{p=0}^{n} (i)^{2p+1} \binom{2n+1}{2p+1} X^{2n+1-(2p+1)} \quad \text{donc} \quad \boldsymbol{P_n = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \binom{2n+1}{2p+1} X^{2(n-p)}}$$

b) Déduire de la question 2 que : $P_n = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$ **(2)**

P_n est un polynôme de degré 2n de coefficient dominant (2n + 1) et dont on a trouvé 2n racines distinctes : les $\mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ pour $k \in [\![1, 2n]\!]$. Ainsi on a trouvé toutes les racines de P_n et ces racines sont simples. De plus on a : $P_n =$

$$(2n+1) \prod_{k=1}^{2n} \left(X - \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X - \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \times \prod_{k=n+1}^{2n} \left(X - \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$$

i.e. $P_n = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X - \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \times \prod_{k=1}^{n} \left(X - \mathrm{cotan}\left(\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}\right)\right) = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X - \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right) \times \left(X + \mathrm{cotan}\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)$

Aussi : $\boldsymbol{P_n = (2n+1) \prod_{k=1}^{n} \left(X^2 - \mathrm{cotan}^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)\right)}$

1/4

a) En comparant le coefficient en X^{2n-2} dans **(1)** et **(2)**, montrer : $\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}$

Le coefficient du terme en X^{2n-2} dans (1) est $-\binom{2n+1}{3}$ et, dans l'expression (2), c'est $-(2n+1)\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

Comme il s'agit les deux fois du coefficient en X^{2n-2} de P_n, on a l'égalité entre ces deux coefficients et donc:

$\binom{2n+1}{3} = (2n+1)\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ d'où : $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{n(2n-1)}{3}}$

d) En déduire que : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}$

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = 1 + \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ donc : $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = n + \sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = n + \frac{n(2n-1)}{3}$

D'où : $\boldsymbol{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)} = \frac{2n(n+1)}{3}}$

4) **a)** Montrer que : $\forall x \in \left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \le x \le \tan(x)$

Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a : $\forall t \in [0, x]$, $\cos(t) \le 1 \le 1 + \tan^2(t)$ donc en intégrant sur $[0, x]$, on obtient par croissance de l'intégration :

$\sin(x) \le x \le \tan(x)$. Ainsi $\boldsymbol{\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin(x) \le x \le \tan(x)}$

b) En déduire un encadrement de $\frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2}$ pour $1 \le k \le n$.

$\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\frac{k\pi}{2n+1} \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc : $0 < \sin\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \le \frac{k\pi}{2n+1} \le \tan\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$ i.e. $0 < \sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \le \left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2 \le \tan^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$

D'où : $\boldsymbol{\forall k \in [\![1, n]\!] , \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \le \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \le \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}}$

c) En déduire la valeur de : $l = \lim_{n\to+\infty} (u_n)$ (on trouvera $l = \frac{\pi^2}{6}$)

De l'encadrement précédent, on déduit : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \cot^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)^2} \le \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n(2n-1)}{3} \le \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 u_n \le \frac{2n(n+1)}{3}$ i.e. : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \le u_n \le \frac{2n(n+1)\pi^2}{3(2n+1)^2}$

Ainsi par le théorème des gendarmes, $\boldsymbol{(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$ **converge vers** $\boldsymbol{\frac{\pi^2}{6}}$

5) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2}$ et $w_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2}$ **a)** Calculer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{2n+1} - w_n$. **En** déduire la limite de $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$u_{2n+1} - w_n = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n+1} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{1}{4}u_n$. Ainsi : $w_n = u_{2n+1} - \frac{1}{4}u_n$: $\boldsymbol{(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$ **converge vers** $\boldsymbol{\frac{\pi^2}{8}}$

a) Calculer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} - u_{2n}$. **En** déduire la limite de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

$v_{2n} - u_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2} = \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ impair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} - \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} = -2\sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ pair}}}^{2n} \frac{1}{k^2} = -2\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k)^2} = -\frac{1}{2}u_n$

Ainsi : $v_{2n} = u_{2n} - \frac{1}{2}u_n$: $\boldsymbol{(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}}$ **converge vers** $\boldsymbol{\frac{\pi^2}{12}}$

D'autre part : $v_{2n+1} = v_{2n} + \frac{1}{(2n+1)^2}$. Ainsi $\boldsymbol{(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}}$ **converge aussi vers** $\boldsymbol{\frac{\pi^2}{12}}$

Aussi les deux suites des termes de rangs pairs et de rangs impairs de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ convergent toutes les deux vers la même limite $\frac{\pi^2}{12}$. **Aussi la suite** $\boldsymbol{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}}$ **converge vers cette même limite** $\boldsymbol{\frac{\pi^2}{12}}$

2/4

PROBLEME II : Recherche des polynômes vérifiant une équation

CORRIGE : RECHERCHE DES POLYNOMES VERIFIANT UNE EQUATION

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé. On se propose de déterminer les couple (A,B) de polynômes de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre eux et vérifiant la relation :

$X(A'B - AB') + X(A^2 - B^2) + aAB = 0$ (1) A' et B' désignant les polynômes dérivés de A et B

Partie I : Recherche du degré des polynômes solutions

Soit $(A,B) \in (\mathbb{R}[X])^2$ tel que $A \wedge B = I$ et vérifiant (1).

1) Etablir que X divise un et un seul des deux polynômes A et B.

Si (A,B) est solution, on a : $AB = \left(\frac{1}{a}\right) X(AB' - A'B + B^2 - A^2)$. Ainsi X divise AB.

Or X est irréductible, donc **X divise au moins un des deux polynômes A et B.**

Or A et B sont premiers entre eux, donc X ne divise pas $A \wedge B$ donc X ne peut pas diviser A et B : **X divise un et un seul des deux polynômes A et B**

2) Etablir que A et B ont même degré et leurs coefficients dominants sont égaux ou opposés.

Soit n le degré de A, p celui de B, α et β les coefficients dominants respectifs de A et B. Soit q = max(n,p).
Par l'absurde : si $p \neq n$. Alors $\max(\deg(X(BA' - B'A)), \deg(aAB)) < \deg(X(A^2 - B^2)) = 2q + 1$
et donc $\deg(X(A'B - AB') + X(A^2 - B^2) + aAB) = 2q + 1$ ce qui contredit que (A,B) soit solution de (1).
Ainsi n = p i.e. **A et B sont de même degré.**
Comme $X(A'B - AB') + aAB = -X(A^2 - B^2)$ et $\deg(X(A'B - AB') + aAB) < 2q + 1$, le coefficient en X^{2q+1} de $X(A^2 - B^2)$ est nul.
Or ce coefficient est : $\alpha^2 - \beta^2$. Donc $|\alpha| = |\beta|$: les **polynômes A et B ont des coefficients dominants égaux ou opposés.**

3) A l'aide du théorème de Gauss, établir que, si X divise B, alors A divise B – A'. En déduire : $B - A' = \varepsilon A$ avec $\varepsilon = \pm 1$ (2).

On suppose que X divise B. On pose C le quotient de B par X. On a, en simplifiant (1) : $(A'B - AB') + (A^2 - B^2) + aAC = 0$.
Or : $(A'B - AB') + (A^2 - B^2) + aAC = B(A' - B) + A(aC + A - B')$. Et donc $B(B - A') = A(aC + A - B')$
Donc A divise B (B – A'). Or A et B sont premiers entre eux, donc d'après le th de Gauss, **A divise B – A'**.
Or, comme $\deg(A) = \deg(B) \geq 0$ (sinon A et B sont nuls et le PGCD de A et B n'est pas I), $\deg(A') < \deg(B)$ et donc :
$\deg(B - A') = \deg(B) = \deg(A)$. Ainsi A et B – A' sont associés (car A divise B – A' qui est de même degré). Or ces deux polynômes ont des coefficients dominants égaux ou opposés. **Ainsi $B - A' = \varepsilon A$ avec $\varepsilon = \pm 1$**

4) Etablir que, si X divise B, alors la relation (1) peut s'écrire successivement :
$X(A - B') + aB = \varepsilon X B$ (3) $X(2\varepsilon A' + A'') = a(\varepsilon A + A')$ (4)

Si X divise B, on a d'après la question précédente : $B = A' + \varepsilon A$ avec $\varepsilon = \pm 1$. En remplaçant dans la relation (1) les deux premières occurrences de B par $A' + \varepsilon A$, on obtient : $aAB - X(\varepsilon A A' + AB') = 0$
Or A est non nul, donc : (1) $\Leftrightarrow aB = X(\varepsilon A' + B') \Leftrightarrow aB = X(\varepsilon B - A + B') \Leftrightarrow$ **$X(A - B') + aB = \varepsilon X B$ (3)**
Puis, dans cette nouvelle expression, on change B en $A' + \varepsilon A$ et donc B' en $A'' + \varepsilon A'$.
On trouve alors : **(1) $\Leftrightarrow$ $X(A - B') + aB = \varepsilon X B$ (3) $\Leftrightarrow$ $X(2\varepsilon A' + A'') = a(\varepsilon A + A')$ (4)**

5) Déduire de (4) que $a = 2\deg(A) = 2\deg(B)$.

On reprend pour notation n le degré de A et α son coefficient dominant.
Le coefficient en X^n dans $X(2\varepsilon A' + A'')$ vaut $2\varepsilon n$ alors qu'il vaut εa dans $a(\varepsilon A + A')$. Or d'après (4), ces deux coefficients sont égaux et donc n = 2a. Comme deg(A) = deg(B), on a bien : **$a = 2\deg(A) = 2\deg(B)$.**

Partie II : Vérification de la suffisance de ces conditions

Soit $(A,B) \in (\mathbb{R}[X])^2$ non nuls vérifiant : X divise B ainsi que les relations (2) et (4). On suppose de plus que $a = 2n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Montrer que si 0 est zéro de A d'ordre r > 0, alors r = a + 1. En déduire $A(0) \neq 0$. Montrer par ailleurs que B(0) = 0.

On suppose que 0 est zéro de A d'ordre r > 0. On peut alors écrire A sous la forme : $A = X^r Q$ avec $Q(0) \neq 0$. On a alors :
$A' = X^{r-1}(rQ + XQ')$ et $A'' = X^{r-2}(r(r-1)Q + 2rXQ' + X^2Q'')$. En remplaçant dans la relation (4), on en déduit :
$X^{r-1}[2\varepsilon r X Q + 2\varepsilon X^2 Q' + r(r-1)Q + 2rXQ' + X^2Q''] = X^{r-1}[a\varepsilon X Q + arQ + aXQ']$
Donc $2\varepsilon r X Q + 2\varepsilon X^2 Q' + r(r-1)Q + 2rXQ' + X^2 Q'' = a\varepsilon X Q + arQ + aXQ'$
En prenant la valeur en 0, on obtient : $r(r-1)Q(0) = arQ(0)$. Or Q(0) et r sont non nuls (par hypothèse), donc **r – 1 = a**.
Or r doit être inférieur ou égal au degré de A (qui est non nul) et donc on ne peut pas avoir $r = 1 + 2\deg(A) > \deg(A)$.
Ainsi **0 n'est pas un zéro de A i.e. $A(0) \neq 0$** . Par ailleurs, comme X divise B, on a **B(0) = 0**

2) Montrer que pour tout entier $k \in [2,n]$, on a : $XA^{(k)} = 2\varepsilon(n - k + 2)A^{(k-2)} + (2n - k + 2 - 2\varepsilon X)A^{(k-1)}$

On reprend la relation (4), avec a = 2n, on a : $XA'' = 2n\varepsilon A + (2n - 2\varepsilon X)A'$. On dérive k – 2 fois cette relation (avec $k \geq 2$)
On trouve, d'après Leibniz : $XA^{(k)} + (k-2)A^{(k-1)} = 2n\varepsilon A^{(k-2)} + (2n - 2\varepsilon X)A^{(k-1)} - 2\varepsilon(k-2)A^{(k-2)}$ c'est-à-dire :
$XA^{(k)} = (2n\varepsilon - 2\varepsilon(k-2))A^{(k-2)} + (2n + 2 - k - 2\varepsilon X)A^{(k-1)}$ i.e. **$XA^{(k)} = 2\varepsilon(n + 2 - k)A^{(k-2)} + (2n + 2 - k - 2\varepsilon X)A^{(k-1)}$**

3) Soit D le PGCD de A et de B. montrer que D divise $A^{(p)}$ pour tout $p \in \mathbb{N}$. En déduire que A et B sont premiers entre eux.

Soit P_k la propriété de récurrence : " D divise $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$ "

- P_0 vraie ? On sait que D divise $A = A^{(0)}$. De plus, puisque $A' = B - \varepsilon A$, D divise aussi $A^{(1)}$. Ainsi **P_0 est vraie**
- Si P_k est vraie, P_{k+1} est-elle également vraie ? On a D divise $A^{(k)}$ et $A^{(k+1)}$. Or $XA^{(k+2)} = 2\varepsilon(n-k)A^{(k)} + (2n - k - 2\varepsilon X)A^{(k+1)}$
  Ainsi D divise $XA^{(k+2)}$. Or D est premier avec X car 0 n'est pas un zéro de D (car 0 n'est pas zéro de A). Donc d'après le théorème de Gauss, D divise $A^{(k+2)}$. On en déduit que **P_{k+1} est vraie**
- Ainsi on a montré que P_0 est vraie et que, si P_k vraie, P_{k+1} est également vraie. Aussi, par le théorème de récurrence, on a : $\forall k \in \mathbb{N}$, P_k vraie en particulier : **$\forall k \in \mathbb{N}$, D divise $A^{(k)}$**

On applique le résultat précédent à k = n le degré de A. $A^{(n)}$ étant un polynôme constant non nul, D étant unitaire et divise $A^{(n)}$, on a D = I. **Ainsi A et B sont premiers entre eux.**

Partie III : Solution du problème posé

On suppose maintenant que $a = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Déterminer les polynômes unitaires A de degré n vérifiant (4).
On établira pour cela une relation entre les coefficients de A et on en déduira une expression de ces coefficients en utilisant notamment des factorielles.

On pose $A = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ avec $a_n = 1$. On a : $A' = \sum_{k=0}^{n} k\, a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, a_{k+1} X^k$ et $A'' = \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1)\, a_{k+1} X^{k-1}$

En remplaçant dans la relation (4), on en déduit : $\sum_{k=0}^{n} 2\varepsilon(k-n)\, a_k X^k + \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)(k-2n)\, a_{k+1} X^k = 0$

Et donc : $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $2\varepsilon(k-n)\, a_k = -(k+1)(k-2n)\, a_{k+1}$ i.e. $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$ $a_{k+1} = -2\varepsilon \dfrac{(n-k)}{(k+1)(2n-k)} a_k$

Ainsi : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = (-2\varepsilon)^k \dfrac{n!\,(2n-k)!}{k!\,(n-k)!\,(2n)!} a_0$

Mais comme on suppose $a_n = 1$, on trouve : $a_0 = \dfrac{(2n)!}{n!\,(-2\varepsilon)^n}$ et donc : **$\forall k \in [\![0, n]\!]$, $a_k = (-2\varepsilon)^{(k-n)} \dfrac{(2n-k)!}{k!\,(n-k)!}$**

Il n'y a donc qu'un seul polynôme unitaire solution de (4) : il s'agit du polynôme : **$A_0 = \sum_{k=0}^{n} (-2\varepsilon)^{(k-n)} \dfrac{(2n-k)!}{k!\,(n-k)!} X^k$**

2) Déterminer alors tous les couples (A,B) de polynômes premiers entre eux et vérifiant (1)

Les polynômes non nuls solution de (4) sont les polynômes: $A = \lambda A_0 = \lambda \sum_{k=0}^{n} (-2\varepsilon)^{(k-n)} \dfrac{(2n-k)!}{k!\,(n-k)!} X^k$ avec λ non nul.

B est tel que (A,B) solution de (1) ssi $B = \varepsilon A + A'$. Il y a donc 2 familles de couples solutions de (1) :

- **les couples (A_1, B_1) avec $A_1 = \lambda \sum_{k=0}^{n} (-2)^{(k-n)} \dfrac{(2n-k)!}{k!\,(n-k)!} X^k$ et $B_1 = A_1 + A_1'$ où λ non nul.**
- **les couples (A_2, B_2) avec $A_2 = \lambda \sum_{k=0}^{n} 2^{(k-n)} \dfrac{(2n-k)!}{k!\,(n-k)!} X^k$ et $B_2 = -A_2 + A_2'$ où λ non nul.**

3) Déterminer en particulier les couples (A,B) lorsque n = 2.

On utilise les expressions proposées avec n = 2 : on trouve les solutions :
$(A,B) = (\lambda(X^2 - 3X + 3),\ \lambda(X^2 - X))$ ou $(A,B) = (\lambda(X^2 + 3X + 3),\ -\lambda(X^2 + X))$ où λ non nul