MPSI 14-15 Feuille n° 19 Bis : Applications linéaires

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $E = \mathbb{R}_n[X]$ et f l'application de E vers définie par :
$\forall P \in E, f(P) = P(X+1) + P(X-1) - 2P(X)$

1. Montrer que f est linéaire. Déterminer $\ker(f)$, $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$
2. Soit $Q \in \mathrm{Im}(f)$. Montrer : $\exists! P \in E \Big| f(P) = Q$ et $P(0) = P'(0) = 0$

Exercice 2. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \geqslant 1$. Soit $f \in L(E)$. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que $(f(a), f^2(a), \cdots, f^{n-1}(a), f^n(a))$ soit libre.

1. Montrer que : $(a, f(a), \cdots, f^{n-1}(a))$ est une base de E
2. Montrer que f est un automorphisme de E.

Exercice 3. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n. Soit $f \in L(E)$. Montrer que :

$$\ker(f) = \mathrm{Im}(f) \Longleftrightarrow \begin{cases} f^2 = 0 \\ n = 2\ \mathbf{rg}(f) \end{cases}$$

Exercice 4. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E. On suppose que : $E = \mathrm{Im}(f) + \mathrm{Im}(g) = \ker(f) + \ker(g)$.
Montrer que les deux sommes sont directes.

Exercice 5. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E tel que : $\forall x \in E, \exists p_x \in \mathbb{N}^* \Big| f^{p_x}(x) = 0_E$.

Montrer que f est nilpotent i.e. $\exists p \in \mathbb{N}^* \Big| f^p = 0_{L(E)}$