

MPSI 15-16 Feuille n° 20 : Intégration sur un segment

Du 21/03/16 au 25/03/16

Exercice 1. Trouver les applications continues f de $[a, b]$ vers \mathbb{R} vérifiant : $\int_a^b f(t)dt = (b-a) \sup_{t \in [a,b]} |f(t)|$

Exercice 2. Soit f une fonction continue de $[a, b]$ vers \mathbb{R} telle que : $\forall x \in [a, b], f(a+b-x) = f(x)$.

1. Exprimer $\int_a^b t f(t)dt$ en fonction $\int_a^b f(t)dt$
2. Calculer $\int_0^\pi \frac{t}{1 + \sin(t)} dt$

Exercice 3. Dérivabilité et dérivée de la fonction définie sur $[1, \infty[$ par $g(x) = \int_x^{x^2} \frac{dt}{1 + \ln(t)}$

Exercice 4. Calculer les limites des suites de terme général :

1. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{n+k}$
2. $\sum_{k=0}^n \frac{n}{n^2+k^2}$
3. $\sum_{k=1}^n \frac{k^2}{n^3+8k^3}$
4. $\sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$
5. $\sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{1}{n^2+k^2}}$
6. $\frac{1}{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n (n+k)}$

Exercice 5. Trouver des primitives des fonctions définies par les expressions :

1. $x^3 e^x$
2. $\operatorname{ch}(x) \cos(x)$
3. $x^2 \ln(x)$
4. $e^x \sin^2(x)$
5. $x^2 \cos(x)$
6. $\frac{(x+1) \cos(x)}{\sin^2(x)}$
7. $\cos(\ln(x))$
8. $\frac{x^3+x^2}{(x^2+1)^2}$
9. $\arcsin(x)$
10. $\arctan(x)$
11. $(x^2+3) \sin(x)$
12. $x^2 \operatorname{sh}^2(x)$

Exercice 6. En utilisant des changements de variables et en les justifiant, trouver des primitives de :

1. $\frac{x}{1+x^4}$ ($t = x^2$)
2. $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ ($x = \operatorname{sh}(t)$)
3. $\frac{1+x}{1+\sqrt{x}}$
4. $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}$ ($x = \ln(t)$)

Exercice 7. Trouver des primitives de :

1. $\frac{x}{(x-1)(x+1)^2}$
2. $\frac{x+1}{(x^2+4x+5)^2}$
3. $\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}$
4. $\frac{2x^2+41x-91}{(x-1)(x+3)(x-4)}$
5. $\frac{1}{(x^2+4x+5)(x^2-4x+3)}$

Exercice 8. Calculer les intégrales suivantes en utilisant des changements de variables

1. $\int_0^1 \sqrt{1-u^2} du$
2. $\int_0^a x^2 \sqrt{a^2-x^2} dx$
3. $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$
4. $\int_3^{29} \frac{(x-2)^{\frac{2}{3}}}{(x-2)^{\frac{2}{3}}+3} dx$
5. $\int_0^{\ln(2)} \sqrt{e^x-1} dx$
6. $\int_0^\pi \frac{dt}{3+2\cos(t)}$
7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+a^2 \sin^2(x)}$
8. $\int_0^{\ln(5)} \frac{e^x \sqrt{e^x-1}}{e^x+3} dx$

Exercice 9. Trouver des primitives des fonctions définies par les expressions :

1. $\sin^4(x)$

2. $\sin^{10}(x) \cos^3(x)$

3. $\sin^4(3x) \cos^2(3x)$

4. $\sin(9x) \sin(x)$

5. $\frac{1}{3 + 5 \cos(x)}$

6. $\frac{3 \sin(x) + 2 \cos(x)}{2 \sin(x) + 3 \cos(x)}$

7. $\frac{1}{3 + 2 \sin(x) + \cos(x)}$

8. $\frac{1}{\operatorname{sh}(x) \operatorname{ch}^2(x)}$

9. $\frac{1}{2 \operatorname{sh}(x) + 3 \operatorname{ch}(x)}$

10. $\sin^5(x)$