Devoir en temps libre n° 15

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Équation $f^2 + f + Id = 0$

Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On appelle $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ la base canonique de E.

PARTIE I On considère ici l'endomorphisme f de E défini par :

$$f(e_1) = 2e_1 - 4e_2 + e_3 \qquad f(e_3) = -3e_1 + 24e_2 + 5e_3 + 4e_4$$
$$f(e_2) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4 \qquad f(e_4) = -57e_2 - 19e_3 - 12e_4$$

1. (a) Calculer $f^2(e_1)$ et $f^2(e_2)$.
   Montrer que $\left(e_1, f(e_1), f^2(e_1)\right)$ et $\left(e_2, f(e_2), f^2(e_2)\right)$ sont deux familles liées.
   (b) Montrer que, si $F_1 = vect(e_1, f(e_1))$ et $F_2 = vect(e_2, f(e_2))$, $E = F_1 \oplus F_2$
2. (a) Montrer que $\mathscr{B}' = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de E
   (b) Exprimer les coordonnées des images par f des vecteurs de $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}'$
3. En déduire l'existence de deux réels α et β tels que : $\alpha f^2 + \beta f + Id_E = 0_{L(E)}$

PARTIE II On considère ici un endomorphisme u de E tel que : $u^2 + u + Id_E = 0_{L(E)}$.

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in E$ non nul, la famille $(x, u(x))$ est libre dans E.
   (b) Montrer que u est un automorphisme de E et déterminer u^{-1}.
2. soit $(x, y) \in E^2$ tels que la famille $(x, y, u(x))$ soit libre.
   Montrer que la famille $(x, y, u(x), u(y))$ est une famille libre.
3. Montrer qu'il existe une base $\mathscr{C} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de E avec $f_3 = u(f_1)$ et $f_4 = u(f_2)$.

PARTIE III On considère ici un endomorphisme u de E tel que : $u^3 + u^2 + u = 0_{L(E)}$.

1. Justifier qu'il existe de tels endomorphismes de E
2. On pose $E_1 = \ker\left(u^2 + u + Id_E\right)$ et $E_2 = \ker(u)$. Montrer que : $\mathrm{Im}(u) \subset E_1$ et que E_1 et E_2 sont stables par u.
3. (a) Montrer que : $E = E_1 \oplus E_2$
   (b) Montrer que : $E_1 = \mathrm{Im}(u)$ et que $E_2 = \mathrm{Im}\left(u^2 + u + Id_E\right)$.
4. Soit u_1 la restriction de u à E_1.
   (a) Montrer que u_1 est un endomorphisme de E_1.
   (b) Calculer $u_1^2 + u_1 + Id_{E_1}$.
   (c) Montrer que :
      i. $u \neq 0 \Longrightarrow \dim(E_1) \geqslant 2$
      ii. $\dim(E_1) > 2 \Longrightarrow (\dim(E_1) = 4$ et u injective $)$

CORRIGE : EQUATION $F^2 + F + I_D = 0$

On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^4$. On appelle $B = (e_1,e_2,e_3,e_4)$ la base canonique de E.

PARTIE I

On considère ici l'endomorphisme f de E définie par : $f(e_1) = 2e_1 - 4e_2 + e_3$ $f(e_2) = e_1 + 3e_2 + 2e_3 + e_4$ $f(e_3) = -3e_1 + 24e_2 + 5e_3 + 4e_4$ $f(e_4) = -57e_2 - 19e_3 - 12e_4$

1) a) Calculer $f^2(e_1)$ et $f^2(e_2)$. Montrer que $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ et $(e_2, f(e_2), f^2(e_2))$ sont liées.

On a : $f^2(e_1) = 2f(e_1) - 4f(e_2) + f(e_3) = -3e_1 + 4e_2 - e_3 = -e_1 - f(e_1)$

De même : $f^2(e_2) = f(e_1) + 3f(e_2) + 2f(e_3) + f(e_4) = -e_1 - 4e_2 - 2e_3 - e_4 = -e_2 - f(e_2)$

Ainsi les familles $(e_1, f(e_1), f^2(e_1))$ et $(e_2, f(e_2), f^2(e_2))$ sont liées.

b) Montrer que , si $F_1 = \text{vect}(e_1, f(e_1))$ et $F_2 = \text{vect}(e_2, f(e_2))$, $E = F_1 \oplus F_2$

La famille $(e_1, f(e_1))$ est libre car les deux vecteurs ne sont pas colinéaires. **Ainsi F_1 est de dimension 2.** **De même, F_2 est de dimension 2**

Soit $x \in F_1 \cap F_2$. $\exists(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid x = a\,e_1 + b\,f(e_1) = c\,e_2 + d\,f(e_2)$. On a donc :

$(a + 2b - d)\,e_1 - (4b + c + 3d)\,e_2 + (b - 2d)\,e_3 - d\,e_4 = 0_E \Leftrightarrow a + 2b - d = 0 = 4b + c + 3d = b - 2d = d \Leftrightarrow a = b = c = d = 0$

Aussi $x = 0_E$. **Donc $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.**

Or : $\dim(F_1) + \dim(F_2) = 4 = \dim(E)$, ainsi par caractérisation des supplémentaires en dimension finie, on a **$E = F_1 \oplus F_2$**

2) a) Montrer que $B' = (e_1, f(e_1), e_2, f(e_2))$ est une base de E.

La question précédente a montré en fait que la famille B' était libre (car $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$). Ainsi B' est une famille de 4 vecteurs dans un espace, E, de dimension 4 donc **B' est une base de E**

b) Exprimer les coordonnées des images par f des vecteurs de B' dans la base B'.

La question 1)a), permet de dire : **$f(e_1) =$** $0.\,e_1 + 1.\,f(e_1) + 0.\,e_2 + 0.\,f(e_2)$, **$f(f(e_1)) =$** $-1.\,e_1 - 1.\,f(e_1) + 0.\,e_2 + 0.\,f(e_2)$

$f(e_2) =$ $0.\,e_1 + 0.\,f(e_1) + 0.\,e_2 + 1.\,f(e_2)$ et **$f(f(e_2)) =$** $0.\,e_1 + 0.\,f(e_1) - 1.\,e_2 - 1.\,f(e_2)$

3) En déduire l'existence de deux réels α et β tels que : $\alpha f^2 + \beta f + Id_E = 0_{L(E)}$

Si x est un des vecteurs de la base B', on a clairement : $f^2(x) + f(x) + x = 0_E$.

Donc, comme f est un endomorphisme de E et comme B' est une base de E, on a : **$f^2 + f + Id_E = 0_{L(E)}$**

PARTIE II

On considère ici un endomorphisme u tel que : $u^2 + u + Id_E = 0$.

1) a) Montrer que, pour tout $x\in E$ non nul, la famille $(x, u(x))$ est libre dans E.

Si $(x,u(x))$ était liée. Alors, comme x est non nul, il existerait $a\in \mathbb{R} \mid u(x) = a\,x$. Donc : $u^2(x) = a\,u(x) = a^2\,x$.

Or : $u^2(x) + u(x) + x = 0_E$ donc $(a^2 + a + 1)\,x = 0_E$. Comme x est non nul, on en déduit que $a^2 + a + 1 = 0_{\mathbb{R}}$.

Or l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle. Donc la dernière relation est impossible.

Aussi, $(x, u(x))$ est une famille libre

b) Montrer que u est un automorphisme et déterminer u^{-1} .

On a : $u \circ (-u - Id_E) = Id_E$ **Aussi u est un automorphisme de E et $u^{-1} = -u - Id_E$**

2) Soit $(x,y)\in E^2$ tels que la famille $(x,y,u(x))$ soit libre. Montrer que la famille $(x,y,u(x),u(y))$ est une famille libre.

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid a\,x + b\,y + c\,u(x) + d\,u(y) = 0_E$ (1) . Supposons par l'absurde que d est non nul. Alors on peut exprimer $u(y)$ comme combinaison linéaire de x, y et $u(x)$: $u(y) = a'\,x + b'\,y + c'\,u(x)$.

En composant par u, on obtient également : $u^2(y) = a'\,u(x) + b'\,u(y) + c'\,u^2(x) = a'\,u(x) + b'\,a'\,x + b'^2\,y + b'c'\,u(x) + c'\,u^2(x)$

En sommant ces relations et en utilisant $u^2 + u = -Id_E$, on obtient : $-y = (a' + a'\,b' - c')\,x + (b' + b'^2)\,y + (a' + b'c')\,u(x)$

Donc $(a' + a'b' - c')\,x + (1 + b' + b'^2)\,y + (a' + b'\,c')\,u(x) = 0_E$. Or $(x, y, u(x))$ est libre donc tous les coefficients sont nuls.

En particulier $1 + b' + b'^2 = 0_{\mathbb{R}}$ ce qui est impossible car l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ n'a pas de solution réelle.

Aussi, si $(x, y, u(x))$ est une famille libre, alors $(x, y, u(x), u(y))$ est également une famille libre

3) Montrer qu'il existe une base $C = (f_1,f_2,f_3,f_4)$ de E telle que $f_3 = u(f_1)$ et $f_4 = u(f_2)$.

On considère f_1 un vecteur de E quelconque non nul. D'après le 1)a), $(f_1, u(f_1))$ est libre. On pose **$f_3 = u(f_1)$.**

Puisque l'espace engendré par $(f_1, u(f_1))$ est de dimension 2 et que E est de dimension 4, il existe au moins un vecteur f_2 de E qui ne soit pas dans $\text{vect}(f_1, u(f_1))$. Mais alors la famille $(f_1, f_2, u(f_1))$ est libre, et donc d'après le 2), on sait que $(f_1, f_2, u(f_1), u(f_2))$ est libre. **C'est une famille libre de 4 vecteurs de E qui est de dimension 4 donc c'est une base de E** (on pose **$f_4 = u(f_2)$**)

PARTIE III

On considère ici un endomorphisme u tel que : $u^3 + u^2 + u = 0$.

1) Justifier qu'il existe de tels endomorphismes de E.

L'endomorphisme nul ou l'endomorphisme de la partie I vérifient ces conditions

2) On pose $E_1 = \ker(u^2+u+Id_E)$ et $E_2 = \ker(u)$. Montrer que : $\text{Im}(u) \subset E_1$ et que E_1 et E_2 sont stables par u.

Soit $x \in \text{Im}(u)$. $\exists t \in E \mid x = u(t)$. On a alors : $(u^2 + u + Id_E)(x) = u^3(t) + u^2(t) + u(t) = 0_E$ Donc $x\in \ker(u^2 + u + Id_E)$.

Ainsi : $\text{Im}(u) \subset E_1$

Soit $x \in E_1$. On a : $(u^2 + u + Id_E)(u(x)) = u((u^2 + u + Id_E)(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $u(x) \in E_1$: **E_1 est stable par u.**

Soit $x \in E_2$. On a : $u(u(x)) = u(0_E) = 0_E$ donc $u(x) \in E_2$: **E_2 est stable par u.**

3) a) Montrer que : $E = E_1 \oplus E_2$

Par analyse-synthèse, on montre aisément..., que pour tout x de E, il existe un unique couple (t,s) de $E_1 \times E_2$ tel que $x = t + s$.

Il suffit de prendre : $t = -u(x) - u^2(x)$ et $s = x + u(x) + u^2(x)$ **Aussi E_1 et E_2 sont deux sous-espaces supplémentaires de E.**

b) Montrer que : $E_1 = \mathrm{Im}(u)$ et que $E_2 = \mathrm{Im}(u^2+u+Id_E)$.

D'après le théorème du rang, la dimension de Im(u) est égale à $\dim(E) - \dim(\ker(u)) = 4 - \dim(E_2)$
Or la question précédente permet également de conclure : $\dim(E_1) = 4 - \dim(E_2)$. Aussi Im(u) et E_1 sont deux espaces vectoriels de même dimension finie. Or Im(u) est un sous-espace de E_1, aussi **$\mathrm{Im}(u) = E_1$.**
Par un argument du même type, on voit clairement que $\mathrm{Im}(u^2 + u + Id)$ est un sous-espace vectoriel de E_2 . Or le même argument de dimension, permet de conclure que l'on a en fait : **$\mathrm{Im}(u^2 + u + Id) = E_2$**

4) **S**oit u_1 la restriction de u à E_1.

a) **M**ontrer que u_1 est un endomorphisme de E_1

Puisque E_1 est stable par u, on a u_1 application de E_1 vers E_1.
La linéarité de u entrainant celle de u_1, **on trouve u_1 endomorphisme de E_1**

b) Calculer $u_1^2 + u_1 + Id_{E_1}$.

Soit $x\in E_1$. $\exists t \in E \mid x = u(t)$. $(u_1^2 + u_1 + Id_{E_1})(x) = u^3(t) + u^2(t) + u(t) = 0_E$. Ainsi **$u_1^2 + u_1 + Id_{E_1} = 0_{L(E_1)}$**

c) **M**ontrer que : **(i)** $u \neq 0 \Rightarrow \dim(E_1) \geq 2$

Si u est non nul. Alors $\mathrm{Im}(u) = E_1$ possède au moins un vecteur non nul f_1. Mais alors $(f_1, u_1(f_1))$ est une famille de E_1.
De plus, elle est libre (on utilise les résultats des questions II)1)a) et III)4)b)).
Ainsi la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 2 car on y a trouvé une famille libre constituée de deux vecteurs.

(ii) $\dim(E_1) > 2 \Rightarrow (\dim(E_1) = 4$ et u injective)

On reprend les notations précédentes. On suppose que $\dim(E_1)\geqslant 3$. Alors, il existe un vecteur f_2 tel que $(f_1, f_2, u_1(f_1))$ soit une famille libre de E_1. Mais alors d'après la question II)3), on en déduit que $(f_1, f_2, u_1(f_1), u_1(f_2))$ est une famille libre de E_1 .
En particulier la dimension de E_1 est supérieure ou égale à 4. Or E_1 est un sous-espace vectoriel de E qui est de dimension 4, donc **$E = E_1$ et $\dim(E_1) = 4$.** Enfin, on constate que comme $E = E_1$, on en déduit $E_2 = \{0_E\}$ i.e. k**er(u) = $\{0_E\}$ i.e. u injective.**