Devoir en temps libre n° 16

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Mines de Sup 1995

Notations:

n est un entier naturel fixé, $n \geqslant 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

PARTIE I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x), \quad \text{et} \quad T(f)(x) = f(x+1)$$

On admettra (aisément!) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = Id_{\mathcal{F}}$ (donc, si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 1$,

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}, \quad T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}.$$

1. (a) i. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.
   Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P.
   Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

   ii. Vérifier que Δ induit un endomorphisme de E_n, noté Δ_n.

   (b) i. Déterminer $\ker \Delta_n$.

   ii. En déduire le rang de Δ_n. Déterminer $\operatorname{Im} \Delta_n$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad N_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad N_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

   (a) i. Pour $k \geqslant 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des polynômes $(N_j)_{j \geqslant 0}$.

   ii. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $\left(\Delta^j(N_k)\right)(0)$.

   (b) i. Montrer que la famille $(N_0, N_1, ..., N_n)$ est une base de E_n.

   ii. Soit $P \in E_n$. P s'écrit $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \cdots + a_n N_n$ où $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
   Exprimer les a_j en fonction des $\left(\Delta^j(P)\right)(0)$.

3. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $\Big(T^k(f)\Big)(x)$.

   (b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{F}$.

   i. Expliciter $\Delta^j(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leqslant k \leqslant j$. (On pourra remarquer que $\Delta = T - Id_{\mathcal{F}}$).

   ii. En déduire que $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ ne dépend que des valeurs $f(0), f(1), ..., f(j)$ de f aux points $0, 1, ..., j$.

PARTIE II

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \deg P \leqslant n \\ \forall k \in \{0,1,...,n\}, \qquad P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose $N(x) = \displaystyle\prod_{j=0}^{n}(x-j) = x(x-1)\cdots(x-n)$.

1. (a) Soit l'application linéaire Φ: $\begin{array}{ccc} E_n & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0),..,P(n)) \end{array}$

   Montrer que Φ est un isomorphisme.

   (b) En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f.

2. (a) Pour $j \in \{0,1,...,n\}$, comparer $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et $\left(\Delta^j(P_f)\right)(0)$.

   (b) En déduire l' expression de P_f en fonction des $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et des polynômes N_j.

3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

   On note $M_n = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right|, \quad t \in [0,n]\right\}$.

   (a) Soit $x \in [0,n]$, non entier. Montrer que: $\exists\, c \in]0,n[\quad / \quad f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}N(x)$.
   (On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x) = 0$, et appliquer judicieusement le théorème de Rolle).

   (b) En déduire que: $\forall x \in [0,n], |f(x) - P_f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1}M_n$.
   (On pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j \in \{0,1,...,n-1\}$).