Devoir en temps libre n° 16

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Mines de Sup 1995

Notations:

n est un entier naturel fixé, $n \geqslant 2$.

$\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$.

E est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels.

E_n est le sous-espace vectoriel des fonctions polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

PARTIE I

Si $f \in \mathcal{F}$, on note $\Delta(f)$ et $T(f)$ les fonctions réelles définies par:

$$\forall x \in \mathbb{R} : \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x), \quad \text{et} \quad T(f)(x) = f(x+1)$$

On admettra (aisément!) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

On note $\Delta^0 = T^0 = Id_{\mathcal{F}}$ (donc, si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta^0(f) = T^0(f) = f$), et, si $j \in \mathbb{N}$, $j \geqslant 1$,

$$\Delta^j = \Delta^{j-1} \circ \Delta = \Delta \circ \Delta^{j-1}, \quad T^j = T^{j-1} \circ T = T \circ T^{j-1}.$$

1. (a) i. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.

   Comparer les degrés de $\Delta(P)$ et de P.

   Calculer le coefficient dominant de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P.

   ii. Vérifier que Δ induit un endomorphisme de E_n, noté Δ_n.

   (b) i. Déterminer $\ker \Delta_n$.

   ii. En déduire le rang de Δ_n. Déterminer $\operatorname{Im} \Delta_n$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, on définit les fonctions polynômes N_k par:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad N_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad N_k(x) = \frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

   (a) i. Pour $k \geqslant 1$, exprimer $\Delta(N_k)$ en fonction des polynômes $(N_j)_{j \geqslant 0}$.

   ii. Calculer, pour $j \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}$, $\Delta^j(N_k)$, puis $\left(\Delta^j(N_k)\right)(0)$.

   (b) i. Montrer que la famille $(N_0, N_1, ..., N_n)$ est une base de E_n.

   ii. Soit $P \in E_n$. P s'écrit $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \cdots + a_n N_n$ où $(a_0, a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
   Exprimer les a_j en fonction des $\left(\Delta^j(P)\right)(0)$.

3. (a) Soient $k \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathcal{F}$. Déterminer pour $x \in \mathbb{R}$, $\Big(T^k(f)\Big)(x)$.

   (b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{F}$.

   i. Expliciter $\Delta^j(f)$ en fonction des $T^k(f)$, $0 \leqslant k \leqslant j$. (On pourra remarquer que $\Delta = T - Id_{\mathcal{F}}$).

   ii. En déduire que $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ ne dépend que des valeurs $f(0), f(1), ..., f(j)$ de f aux points $0, 1, ..., j$
   .

PARTIE II

On se donne une fonction f de $\mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème $(\mathcal{P})$ suivant:

$$(\mathcal{P}) \quad \begin{cases} \deg P \leqslant n \\ \forall k \in \{0, 1, ..., n\}, \qquad P(k) = f(k) \end{cases}$$

On pose $N(x) = \prod_{j=0}^{n} (x - j) = x(x-1)\cdots(x-n)$.

1. (a) Soit l'application linéaire Φ: $\begin{array}{ccc} E_n & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0), .., P(n)) \end{array}$

   Montrer que Φ est un isomorphisme.

   (b) En déduire que le problème $(\mathcal{P})$ possède une unique solution notée P_f.

2. (a) Pour $j \in \{0, 1, ..., n\}$, comparer $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et $\left(\Delta^j(P_f)\right)(0)$.

   (b) En déduire l' expression de P_f en fonction des $\left(\Delta^j(f)\right)(0)$ et des polynômes N_j.

3. Dans cette question, on suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$.

   On note $M_n = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right|, \quad t \in [0, n]\right\}$.

   (a) Soit $x \in [0, n]$, non entier. Montrer que: $\exists\, c \in]0, n[\quad / \quad f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} N(x)$.
   (On pourra poser $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où K est tel que $\varphi(x) = 0$, et appliquer judicieusement le théorème de Rolle).

   (b) En déduire que: $\forall x \in [0, n], |f(x) - P_f(x)| \leqslant \dfrac{1}{n+1} M_n$.
   (On pourra majorer $|N(x)|$ sur chaque intervalle $[j, j+1]$, où $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$).

CORRECTION

Notations: $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$. $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. $E = \mathbb{R}[X]$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$.

PARTIE I

Si $f \in \mathcal{F}$, $\Delta(f)$ et $T(f)$ sont définies par: $\forall x \in \mathbb{R} : \Delta(f)(x) = f(x+1) - f(x)$, et $T(f)(x) = f(x+1)$
On admettra (aisément!) que Δ et T sont des endomorphismes de $\mathcal{F}$.

1. (a) i. Soit $P \in E$, non constant. $\Delta(P)$ est une fonction polynôme.
Soit p le degré de P, $p \geqslant 1$ car P non constant.
On a : $P = a_p X^p + a_{p-1}X^{p-1} + \sum\limits_{0 \leqslant k < p-1} a_k X^k$ et
$P(X+1) = a_p X^p + (pa_p + a_{p-1})X^{p-1} + \sum\limits_{0 \leqslant k < p-1} b_k X^k$ avec b_k des coefficients liés aux a_i. Ainsi : $\Delta(P) = pa_p X^{p-1} + \sum\limits_{0 \leqslant k < p-1} c_k X^k$ avec $c_k = b_k - a_k$.
Donc $\boxed{\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1 \textbf{ et le coefficient dominant de } \Delta(P) \textbf{ est } \lambda \deg(P)}$ où λ est le coefficient dominant de P.
ii. On sait que Δ est une application linéaire de E vers E. De plus, si $P \in E_n$, $\Delta(P) \in E_n$. Ainsi la restriction Δ_n de Δ à E_n est un endomorphisme de E_n.
(b) i. Si P est un polynôme non constant alors $\Delta_n(P) \neq 0$ car son degré est positif ou nul.
Si P est un polynôme constant $\Delta_n(P) = 0$. Ainsi $\boxed{\ker \Delta_n = E_0 = \mathbb{R}_0[X]}$.
ii. D'après le théorème du rang, on déduit du résultat précédent :
$\mathrm{rg}(\Delta_n) = \dim(E_n) - \dim(\ker \Delta_n) = (n+1) - 1$ i.e. $\boxed{\mathbf{rg}(\Delta_n) = n}$.
D'après le calcul du degré de $\Delta(P)$ en fonction de celui de P, on sait que $\mathrm{Im}(\Delta_n) \subset E_{n-1}$. Ainsi $\mathrm{Im}(\Delta_n)$ est un sous-espace de E_{n-1} de même dimension finie n que E_{n-1}.
Ainsi $\boxed{\mathrm{Im}(\Delta_n) = E_{n-1} = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$, N_k par: $\forall x \in \mathbb{R}$, $N_0(x) = 1$ et $N_k(x) = \dfrac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$
(a) i. Pour $k \geqslant 1$, on trouve aisément $\boxed{\Delta(N_k) = N_{k-1}}$. On trouve aussi aisément : $\boxed{\Delta(N_0) = 0}$.
ii. Par récurrence, on montre aisément, $\boxed{\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \Delta^j(N_k) = N_{k-j} \textbf{ si } j \leqslant k \textbf{ et } 0 \textbf{ sinon}}$.
On en déduit : $\boxed{\forall (j,k) \in \mathbb{N}^2, \Delta^j(N_k)(0) = \delta_{k,j}}$.
(b) i. La famille $(N_0, N_1, ..., N_n)$ est une famille de polynômes de degré échelonné donc c'est une famille libre de E_n. S'agissant d'une famille libre de $n+1$ vecteurs de E_n qui est de dimension $n+1$, c'en est une base : $\boxed{(N_0, N_1, ..., N_n) \textbf{ est une base de } E_n}$.
ii. En utilisant l'expression de $\Delta^j(N_k)(0)$ à l'aide du symbole de Kronecker, on a :
si $P = a_0 N_0 + a_1 N_1 + \cdots + a_n N_n$, alors $\boxed{a_j = \left(\Delta^j(P)\right)(0)}$.

3. (a) Par récurrence, on montre aisément : $\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \left(T^k(f)\right)(x) = f(x+k)}$.
(b) Soit $j \in \mathbb{N}$. Soit $f \in \mathcal{F}$.
i. Puisque $\Delta = T - Id_{\mathcal{F}}$ et T et $Id_{\mathcal{F}}$ commutent, on a $\boxed{\Delta^j(f) = \sum\limits_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} T^{(j-k)}(f)}$.
ii. En utilisant les deux résultats précédents, on en déduit :
$$\boxed{\Delta^j(f)(0) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} f(j-k) = (-1)^j \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} f(k)} .$$

PARTIE II

Soit $f \in \mathcal{F}$. On cherche les polynômes solutions du problème : $(\mathcal{P})\quad \begin{cases} \deg P \leqslant n \\ \forall k \in \{0,1,...,n\}, \qquad P(k) = f(k) \end{cases}$ On pose $N(x) = \prod_{j=0}^{n}(x-j) = x(x-1)\cdots(x-n)$.

1. (a) Soit l'application linéaire Φ: $\begin{array}{ccc} E_n & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & (P(0),..,P(n)) \end{array}$

   Soit $P \in E_n$.
   $P \in \ker(\Phi) \iff \forall k \in [\![0,n]\!], P(k) = 0 \iff P = 0_{E_n}$ car le polynôme nul est le seul polynôme de degré inférieur ou égal à n s'annulant en $n+1$ points distincts.
   Ainsi $\boxed{\ker(\Phi) = \{0_{E_n}\}}$ et donc Φ est injective.
   Or $\dim(E_n) = n+1 = \dim\left(\mathbb{R}^{n+1}\right)$, donc par caractérisation des isomophismes en dimension finie, $\boxed{\boldsymbol{\Phi} \textbf{ est un isomorphisme}}$.

   (b) On a donc : $\forall y = (y_0, y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \exists! P \in E_n \big| \Phi(P) = (y_0, y_1, \cdots, y_n)$. En particulier avec $y = (f(0), f(1), \cdots, f(n))$, on a l'existence et l'unicité d'un polynôme P_f de degré inférieur ou égal à n tel que $\Phi(P_k) = (f(0), f(1), \cdots, f(n))$ i.e. $\boxed{\exists! P_f \in \mathbb{R}_n[X] \big| \forall k \in [\![0,n]\!], P_f(k) = f(k)}$.

2. (a) Pour $j \in \{0,1,...,n\}$, on a $\Delta^j(f)(0) = (-1)^j \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} f(k) = (-1)^j \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \binom{j}{k} P_f(k)$ par définition de P_f. Ainsi $\boxed{\left(\Delta^j(f)\right)(0) = \left(\Delta^j(P_f)\right)(0)}$.

   (b) On a montré dans la partie I que tout polynôme $P \in E_n$, s'écrivait sous la forme
   $P = \sum_{k=0}^{n} \left(\Delta^k(P)\right)(0)\, N_k$. Donc : $\boxed{P_f = \sum_{k=0}^{n} \left(\Delta^k(f)\right)(0)\, N_k}$.

3. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$. On note $M_n = \sup\left\{\left|f^{(n+1)}(t)\right|, \quad t \in [0,n]\right\}$.

   (a) Soit $x \in [0,n]$, non entier. Soit φ définie sur $[0,n]$ par $\varphi(t) = f(t) - P_f(t) - KN(t)$, où $K = \dfrac{f(x) - P_f(x)}{N(x)}$ est tel que $\varphi(x) = 0$ et existe car $N(x) \neq 0$.
   Puisque φ s'annule en $n+2$ points différents dans $[0,n]$, aux entiers $0, 1, \cdots n$ et en x, on en déduit d'après le théorème de Rolle, que φ' s'annule en $n+1$ points différents dans $]0,n[$, puis φ'' s'annule en n points différents dans $]0,n[$, $\cdots$, et puis $\varphi^{(n+1)}$ s'annule en 1 point $c \in]0,n[$.
   Or $\forall t \in [0,n], \varphi^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t) - K(n+1)!$ car $\deg(P_f) < n+1$ et N unitaire de degré $\deg(N) = n+1$. Ainsi $K = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ et donc $\boxed{\exists\, c \in \,]0,n[\; \big|\; f(x) - P_f(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} N(x)}$.

   (b) Soit $x \in [0,n]$. Si x est entier on a $f(x) - P_f(x) = 0$ et la relation proposée.
   Sinon. D'après la question précédente : $|f(x) - P_f(x)| \leqslant \dfrac{|N(x)|}{(n+1)!} M_n$.
   Or, en notant $j = \lfloor x \rfloor$, on a, si $j < n$, $|N(x)| \leqslant (j+1)!(n-j)! = \dfrac{(n+1)!}{\binom{n+1}{j+1}} \leqslant n!$ et si $j = n$ on a directement $|N(x)| \leqslant n!$.
   Ainsi $\boxed{\forall x \in [0,n], |f(x) - P_f(x)| \leqslant \dfrac{M_n}{n+1}}$