

MPSI 15-16 Feuille n° 21 : Intégration sur un segment

Du 30/03/16 au 22/04/16

Exercice 1. Noyau, image de l'application $u : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto MA - AM$ où $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

Exercice 2. Par la méthode du pivot de Gauss, déterminer l'inversibilité et calculer l'inverse de :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 4 \\ -1 & 11 & 8 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Soient :

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ et } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y) \mapsto (x, x + y, 2x).$$

Montrer que f est linéaire, que \mathcal{B} et \mathcal{C} sont des bases de \mathbb{R}^2 et \mathbb{R}^3 , et déterminer $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f)$

Exercice 4. Déterminer la matrice dans la base canonique de $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (y + z, x + z, x + y)$.

Exercice 5. Soit E l'espace des fonctions sur \mathbb{R} engendrées par $\mathcal{S} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ où :

$\forall x \in \mathbb{R}, f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = e^x$ et $f_4(x) = xe^x$. Soit u l'application définie sur E par : $u(f) = f'$.

1. Montrer que u est un endomorphisme de E
2. Montrer que \mathcal{S} est une base de E
3. Déterminer la matrice de u dans la base \mathcal{S}

Exercice 6. Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On appelle trace de A et on note $\text{tr}(A)$ la valeur : $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$

1. Montrer que tr , l'application qui à une matrice A associe sa trace, est une forme linéaire
2. Montrer que : $\forall (A, B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2, \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.
A-t-on $\text{tr}(AB) = \text{tr}(A) \times \text{tr}(B)$ et $\text{tr}(ABC) = \text{tr}(ACB)$?
3. Montrer que si A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, alors on a : $\text{tr}(A) = \text{tr}(B)$
4. Montrer que si $AB - BA = A$ alors A n'est pas inversible.
5. Montrer qu'il n'existe pas de matrices A et B telles que : $AB - BA = I_n$

Exercice 7. Déterminer les rangs des matrices suivantes :

1. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1+x & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+x & \ddots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 1+x \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & a \end{pmatrix}$ où $a \in \mathbb{C}$

Exercice 8. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Montrer qu'il existe trois suites (à déterminer) $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}, (\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et

$(\gamma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que : $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \alpha_n I_3 + \beta_n A + \gamma_n A^2$

Exercice 9. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$1. \begin{cases} 3x + y & = 0 \\ 6x + 2y + z & = 2 \\ 9x + 3y + 7z & = 14 \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x - 3y + z & = 1 \\ 2x + y - z & = -1 \\ x + 11y - 5z & = 5 \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 2x + y - 2z & = 10 \\ 3x + 2y + 2z & = 1 \\ 5x + 4y + 3z & = 4 \end{cases}$$

Exercice 10. Déterminer le noyau, l'image et la matrice dans les bases canoniques de \mathbb{R}^4 et \mathbb{R}^3 de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z, t) \mapsto (z, x + y + z - t, x + z)$.

Exercice 11. Soit u l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 est

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Déterminer $\lambda \in \mathbb{R} \mid \exists y \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}; u(y) = \lambda y$. On dit alors que λ est une valeur propre de u et que y est un vecteur propre de u associé à la valeur propre λ .
On note $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ les 3 valeurs propres trouvées. On note f_1, f_2, f_3 des vecteurs propres associés.
- Montrer que $\mathcal{C} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
- Trouver la matrice D de u dans la base \mathcal{C} .
- On pose $P = \text{mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{C})$. Déterminer une relation entre A, D, P et P^{-1}
- Calculer A^n

Exercice 12. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \alpha, u_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$.

Soient $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que : $X_n = A^n X_0$
- Résoudre l'équation $(E) : \det(x I_2 - A) = 0$
- Trouver une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$
- Calculer A^n . En déduire une expression de u_n à l'aide de n, α et β .

Exercice 13. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \alpha, u_1 = \beta$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n$.

Soient $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que : $X_n = A^n X_0$
- Résoudre l'équation $(E) : \det(x I_2 - A) = 0$
- Trouver une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.
- Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que N est nilpotente.
- En écrivant $D = 2I_2 + N$, calculer D^p
- Calculer A^n . En déduire une expression de u_n à l'aide de n, α et β .

Exercice 14. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $u_0 = \alpha, u_1 = \beta, u_2 = \lambda$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = 3u_{n+2} + 4u_{n+1} - 12u_n$.

Soient $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -12 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- Montrer que : $X_n = A^n X_0$
- Résoudre l'équation $(E) : \det(x I_3 - A) = 0$

3. Trouver une matrice inversible P telle que $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Soit $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que N est nilpotente.

4. Calculer A^n . En déduire une expression de u_n à l'aide de n, α, β et λ .

Exercice 15. 1. Quel est l'endomorphisme (on exprimera cet endomorphisme en donnant l'image de (x, y, z))

dont la matrice dans la base canonique \mathcal{B} de \mathbb{R}^3 est $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Soit s la symétrie orthogonale par rapport au plan P d'équation $x - y + z = 0$.

(a) Déterminer un élément e_1 de \mathbb{R}^3 orthogonal à P et non nul.

(b) Trouver une base \mathcal{C} de \mathbb{R}^3 telle que la matrice de s dans la base \mathcal{C} est A .

(c) Déterminer la matrice de s dans la base \mathcal{B} ainsi que $mat_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$

3. (a) Quelle est la matrice de passage Q de la base \mathcal{B} à la base \mathcal{C} ? Déterminer l'inverse de cette matrice?

(b) Quelles relations a-t-on entre $mat_{\mathcal{B}}(s)$, $mat_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$, Q et A ?

Exercice 16. Soit p le projecteur de \mathbb{R}^3 d'image $vect(\vec{i}, \vec{j})$ et de noyau $vect(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$

1. Déterminer la matrice de p dans la base $vect(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de \mathbb{R}^3 .

2. Déterminer la matrice dans cette base de la symétrie associée.

Exercice 17. 1. Calculer tous les produits possibles parmi les quatre matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Déterminer les rangs et noyaux des applications linéaires associées à ces matrices.

Exercice 18. Soit $A = \begin{pmatrix} -9 & -14 & -8 \\ 7 & 11 & 5 \\ 3 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et soit $u \in L(\mathbb{R}^3)$ dont A est la matrice dans la base canonique.

1. Déterminer les noyaux de $A - I_3$, $A - 2I_3$ et $A - 3I_3$.

2. Donner une base de \mathbb{R}^3 constituée de vecteurs de ces 3 noyaux ainsi que la matrice de passage Q de la base canonique vers cette base. Calculer l'inverse de Q .

3. Déterminer la matrice B de u dans cette base. Donner la relation entre A, B et Q .

4. En déduire que A est inversible (déterminer son inverse) et A^n . Quelle relation linéaire a-t-on entre I_3, A, A^2 et A^3 . Retrouver l'inverse de A .

Exercice 19. Soit $A = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 2 \sin(\theta) \\ \frac{1}{2} \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ où $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. Montrer que : $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \mid A^2 = \alpha A + \beta I_2$.

2. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

3. À quelle condition a-t-on A inversible. Dans ce cas, déterminer A^{-1}

Exercice 20. Soit f l'endomorphisme de \mathbb{R}^3 de matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & -4 \\ 8 & -15 & -8 \\ -10 & 20 & 11 \end{pmatrix}$.

Déterminer $\ker(f + Id)$ et $\ker(f - Id)$. Vérifier que f est une symétrie vectorielle.

Exercice 21. Soit A une matrice carrée telle que $A^2 = I_n$. Montrer que : $\forall p \in \mathbb{N}^*, (I_n + A)^p = 2^{p-1}(I_n + A)$

Exercice 22. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer A^{-1} par la méthode du pivot. Résoudre $\begin{cases} x + y + z = a \\ x + 2y + 3z = b \\ x + 3y + 4z = c \end{cases}$

Exercice 23. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. En utilisant B , calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. A est-elle inversible ? Dans ce cas, calculer A^{-1}

3. Si P est un polynôme, montrer que : $P(A) = \begin{pmatrix} P(2) & P'(2) & \frac{1}{2}P''(2) \\ 0 & P(2) & P'(2) \\ 0 & 0 & P(2) \end{pmatrix}$

Exercice 24. 1. Soit $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Déterminer les matrices carrées d'ordre 3 commutant avec D .

2. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ i.e. $\left\{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), AM = MA \right\}$

Exercice 25. A tout polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$, on associe le polynôme : $Q = P + P'$.

1. Écrire la matrice de cette application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$

3. Résoudre $f(P) = Q$ dans les cas suivants : $Q = X^3 - 2X^2$ et $Q = X^2 + X + 1$

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \mapsto \mathbb{R}_3[X], P \mapsto XP' - P$.

1. Écrire la matrice de cette application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$

3. Discuter, selon le polynôme Q , l'existence d'un polynôme P tel que $f(P) = Q$.

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R}_3[X] \mapsto \mathbb{R}_3[X], P \mapsto P'' - 2P' + 3P$.

1. Écrire la matrice de cette application linéaire f dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. Déterminer $\ker(f)$ et $\text{Im}(f)$

3. Discuter, selon le polynôme Q , l'existence d'un polynôme P tel que $f(P) = Q$.

Exercice 28. Déterminer les inverses des matrices suivantes :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 4 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 29. Calculer A^n

$$1. A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$$3. A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a + \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & a - \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 30. Soit $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Calculer J^n pour $n \in \mathbb{N}^*$
2. Quelle est la dimension de l'espace vectoriel E engendré par la famille $(J^n)_{n \in \mathbb{N}}$?
3. Montrer que E est un sous-anneau de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$
4. Montrer que : $(M \in E) \iff (M \text{ commute avec } J) \iff (M \text{ commute avec toute matrice de } E)$
5. Soit $A = I_3 - J + J^2$. Déterminer les matrices X de E telles que : $AX = XA = X$