

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 17

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Intégrales de Wallis - Formule de Stirling

Le problème a pour but de démontrer la formule de Stirling affirmant $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$. On va en donner plusieurs démonstrations mais toutes celles proposées utilisent un résultat sur les intégrales de Wallis.

PARTIE I Intégrales de Wallis

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt$ qu'on appelle intégrale de Wallis

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est monotone. En déduire que $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

2. En intégrant par parties, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \implies I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}$

3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $T_n = I_n \times I_{n-1}$. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n .
En déduire T_n en fonction de n .

4. En utilisant le théorème des gendarmes, montrer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n} = 1$.

En déduire à l'aide du 3, $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$

5. Soient $J_p = I_{2p}$ et $K_p = I_{2p+1}$. En écrivant la relation de récurrence liant J_p et J_{p+1} , montrer que $J_p = \frac{(2p)!}{2^{2p} (p!)^2} \frac{\pi}{2}$. Exprimer de même $K_p = I_{2p+1}$ en fonction de p .

PARTIE II Première approche de la formule de Stirling

On rappelle qu'un DL à l'ordre 3 de $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + o\left(\frac{1}{n^3}\right)$

1. Soit $f_n = \frac{1}{n^2}$. Soit $S_n = \sum_{k=1}^n f_k = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$.

(a) Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante.

(b) Montrer que : $\forall k > 1, \frac{1}{k^2} \leq \int_{k-1}^k \frac{dx}{x^2}$ (on pourra s'aider d'un dessin)

(c) En déduire que, pour $n \geq 1, S_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 2 - \frac{1}{n}$.

(d) En déduire que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

2. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $V_n = \sum_{k=1}^n v_k$.

Montrer que, si $v_n \sim \frac{1}{n^2}$, alors $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

3. Soient $u_n = \frac{1}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$, $w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ et $W_n = \sum_{k=1}^n w_k$.

En utilisant un DL, montrer que : $w_n = \frac{1}{12n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Qu'en déduire pour $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

4. En déduire qu'il existe $A > 0$ tel que : $n! \sim A \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}$.

5. En utilisant la partie I, calculer A et en déduire la formule de Stirling.

PARTIE III Seconde approche de la formule de Stirling

1. Soit $k > 0$ un entier et f la fonction réelle définie sur $[k, k + 1]$ par $f(t) = \ln(t)$.
 Soit g la fonction affine sur $[k, k + 1]$ et h la fonction affine sur $\left[k, k + \frac{1}{2}\right]$ et $\left[k + \frac{1}{2}, k + 1\right]$ vérifiant :
 $f(k) = g(k) = h(k)$, $f(k + 1) = g(k + 1) = h(k + 1)$, $f'(k) = h'(k)$ et $f'(k + 1) = h'(k + 1)$.
- (a) Représenter les courbes de f, g et h sur un même dessin, en précisant leurs positions relatives.
 (Attention : h n'est pas continue)
- (b) Par des considérations d'intégrales, prouver que :

$$\frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k + 1)) \leq \int_k^{k+1} \ln(t) dt \leq \frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k + 1)) + \frac{1}{8k} - \frac{1}{8(k + 1)}$$

2. On pose, pour $n > 0$ entier, $J_n = \int_1^n \ln(t) dt$, $K_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k + 1))$ et

$$L_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{2}(\ln(k) + \ln(k + 1)) + \frac{1}{8} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1} \right) \right)$$

- (a) Exprimer J_n, K_n et L_n en fonction de n . On fera apparaître $\ln(n!)$ pour les dernières.
 (b) Démontrer que la suite $(J_n - K_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et majorée donc converge vers un réel ℓ .
 (c) Donner un équivalent simple de $n!$ en fonction de cette limite ℓ .
 (d) En utilisant la partie I, calculer ce réel ℓ . En déduire la formule de Stirling.

PARTIE IV Troisième approche de la formule de Stirling

1. Déterminer la monotonie et le signe sur $[0, 1[$ des trois fonctions définies par :

$$f(x) = -x + \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right|, \quad g(x) = \frac{x^3}{3(1 - x^2)} \quad \text{et} \quad h(x) = f(x) - g(x)$$

2. (a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer $(2n + 1) f\left(\frac{1}{2n + 1}\right)$ et $(2n + 1) g\left(\frac{1}{2n + 1}\right)$
- (b) On considère les suites de termes généraux : $u_n = \frac{n^{\frac{2n+1}{2}} e^{-n}}{n!}$ et $v_n = u_n e^{\frac{1}{12n}}$.
 Démontrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est croissante et que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.
- (c) Démontrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ convergent vers la même limite.
- (d) En déduire qu'il existe un réel λ tel que $n! \sim \lambda n^{\frac{2n+1}{2}} e^{-n}$.
 Déterminer λ à l'aide de la partie I
- (e) Quelle est la limite de $w_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{n!}$ quand n tend vers $+\infty$?

WALLIS John (1616 - 1703) *mathématicien anglais qui a été le premier à écrire π comme produit d'un nombre infini de rationnels : il montra (cf Partie I) que $\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8 \dots}{1.3.3.5.5.7.7.9.9 \dots}$ mais ce produit converge très lentement.*

STIRLING James (1692 - 1770) *mathématicien anglais. Sa formule est remarquable car elle fait intervenir π dans un domaine (les probabilités) où on ne l'attendait pas. De plus, cette formule $n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ permet d'avoir un très bon ordre de grandeur de $n!$*