Devoir en temps libre n° 18

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Mines de Sup TSI 1996

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On considère les matrices $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On convient que si M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ alors $M^0 = \mathbf{I}$.
Si P est un polynôme réel avec $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ et si M est une matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $P(M)$ la matrice : $P(M) = \sum_{k=0}^{n} a_k M^k = a_0 \mathbf{I} + a_1 M + \cdots + a_n M^n$.

PARTIE A

1. Montrer que $\mathbf{A}$ est inversible et calculer $\mathbf{A}^{-1}$
2. (a) Calculer $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$
   (b) Montrer que $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^2$ et $\mathbf{A}^3$ se mettent sous la forme : $\mathbf{A} = \lambda_1 \mathbf{A} + \mu_1 \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^2 = \lambda_2 \mathbf{A} + \mu_2 \mathbf{I}$ et $\mathbf{A}^3 = \lambda_3 \mathbf{A} + \mu_3 \mathbf{I}$ où $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ sont des réels que l'on précisera.
3. On donne la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \alpha_{n+2} = \alpha_{n+1} + 2\alpha_n$.
   Montrer, par récurrence sur n, que : $\forall n \geqslant 2, \mathbf{A}^n = \alpha_n \mathbf{A} + 2\alpha_{n-1} \mathbf{I}$
4. (a) Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\alpha_n = \sigma(-1)^n + \tau 2^n$, où σ et τ sont deux réels indépendants de n que l'on déterminera
   (b) En déduire l'expression de $\mathbf{A}^n$ en fonction de n pour tout entier naturel n non nul.

PARTIE B

On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est $\mathbf{A}$.

1. (a) On pose $E_1 = \ker(f + Id)$ et $E_2 = \ker(f - 2Id)$. Rappeler pourquoi E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Déterminer E_1 et E_2 ainsi que leur nature géométrique. Donner une base $\mathscr{C}_1$ de E_1 et une base $\mathscr{C}_2$ de E_2.
   <u>On choisira des vecteurs dont la première coordonnée est 1 et dont une coordonnée est nulle, lorsque cela est possible</u>.
   (c) Montrer que, si on appelle $\mathscr{C}$ la famille obtenue en effectuant la réunion de $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, on obtient une base de $\mathbb{R}^3$
   (d) Montrer que $\mathbb{R}^3 = E_1 \oplus E_2$
   (e) Soient f_1 et f_2 les restrictions de f à E_1 et E_2. Déterminer les natures géométriques de f_1 et f_2.
2. (a) Déterminer la matrice $\mathbf{D}$ de f dans la base $\mathscr{C}$
   (b) Déterminer la matrice de passage $\mathbf{P}$ de la base canonique $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{C}$.
   (c) Rappeler pourquoi $\mathbf{P}$ est inversible et calculer son inverse $\mathbf{P}^{-1}$
   (d) Montrer que, pour tout entier n naturel non nul, $\mathbf{A}^n = \mathbf{P}\mathbf{D}^n\mathbf{P}^{-1}$
   (e) En déduire la valeur de $\mathbf{A}^n$ en fonction de n entier naturel non nul.

PARTIE C

1. (a) Calculer le produit $(\mathbf{A}+\mathbf{I})(\mathbf{A}-2\mathbf{I})$. En déduire à nouveau que $\mathbf{A}$ est inversible et retrouver $\mathbf{A}^{-1}$.
   (b) Calculer de même $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^2$ et $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^2$, et en déduire une expression simple de $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^n$ et $(\mathbf{A}-2\mathbf{I})^n$ pour tout entier n non nul.

2. On note $\mathbf{M}(a,b)$ la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $\mathbf{M}(a,b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) On note l'ensemble $F = \left\{ \mathbf{M}(a,b) \middle| (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que F est de dimension 2.
   (c) Montrer que $((\mathbf{A}+\mathbf{I}), (\mathbf{A}-2\mathbf{I}))$ est une base de F.
   (d) Calculer les coordonnées de $\mathbf{M}(a,b)$ dans cette base.

3. Calculer $(\mathbf{M}(a,b))^n$ pour tout entier naturel n non nul. Vérifier le résultat obtenu dans le cas particulier $\mathbf{M}(0,1)$

PARTIE D

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit R_n le reste de la division euclidienne du polynôme X^n par $(X+1)(X-2)$.

1. (a) Que peut-on dire du degré de R_n ?
   (b) Calculer $R_n(-1)$ et $R_n(2)$ puis déterminer le polynôme R_n.
   (c) Montrer que les coefficients de R_n sont des entiers.

2. Retrouver à nouveau l'expression de $\mathbf{A}^n$