TP d'informatique n°13
(Python Maths)

Résolutions approchées d'équations numériques

L'objectif du TP est d'apprendre à construire des graphes avec Python

0) Etude et tracé de fonction

Ex 0 :

1°) Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$.

Déterminer 3 intervalles (dont les bornes sont deux entiers consécutifs) sur lesquels f s'annule une fois et une seule.

2°) Pour tracer une fonction, il faut commencer par charger la bibliothèque pyplot de matplotlib (ici sous le nom plt). On utilise pour cela l'instruction :

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

Définir une fonction tracefonction de variables f, a, b et n qui trace la fonction f sur l'intervalle [a,b] avec n points (ou plutôt n+1).

L'utiliser pour tracer f sur [-2,4].

I) Dichotomie

Ex 1 :

1°) Ecrire une fonction dicho de variables une fonction f, des réels a et b et un entier n, qui :

* vérifie que f(a) et f(b) sont de signe contraire
* puis détermine, par la méthode de dichotomie, une valeur approchée à 10^{-n} près d'une racine de f sur cet intervalle.

Tester dicho sur f et chacun de 3 intervalles trouvés au I)

2°) Amélioration de la méthode.

Ecrire une fonction dichothales de mêmes variables que la précédente qui, à la dernière étape, partage l'intervalle [a,b] dans le rapport $\dfrac{|f(a)|}{|f(b)|}$

Comparer avec la méthode précédente grâce au calcul de l'image du résultat obtenu.

II) Newton

Ex 2 :

La méthode de Newton pour trouver une valeur approchée d'une solution x_0 de l'équation f(x) = 0 consiste à partir d'un point a "proche de x_0" et de proposer la valeur approchée $a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ puis réitérer le processus à partir de cette nouvelle valeur.

Ecrire une fonction newton de variables les fonctions f et g (= f '), un réel a et le nombre d'itérations n, qui donne (dans le meilleur des cas !) une racine de f « proche de a ».

Tester sur l'exemple précédent avec a = 1, a = -1, a=3, puis a = 0, a = 2 et enfin pour des valeurs proches des deux dernières. Que constate-t-on ?
pour les plus avancés, tracer sur [-2,4] la fonction qui à a associe la racine vers laquelle converge la méthode (en faisant varier le nombre de points)
Rem : comme on n'est pas assuré de la convergence de la méthode, il est plus prudent de faire porter le test d'arrêt sur n ; par contre, si elle converge, la convergence est très rapide, il est donc inutile de prendre des grandes valeurs de n (n = 10 suffit)

Ex 3 **:**
Pour la résolution de $x^p = a$, c'est à dire pour l'extraction de racines p-ièmes cette méthode s'appelle la méthode de Héron d'Alexandrie. Ecrire une fonction heron de variables a , p et n (nombre d'itérations) qui utilise cette méthode.
L'appliquer pour le calcul approchée de $\sqrt{2}$ et comparer le résultat obtenu à la valeur approchée de $\sqrt{2}$.

III) Correction des exercices du cours

1) Appliquer la méthode de Newton pour trouver des solutions de l'équation
$x^3 + c x + 1 = 0$.

a) Pour c > 0, constater (puis montrer si possible) que la méthode de Newton converge pour tout choix de la valeur initiale.

b) Pour c = 0. Prédire le comportement de la méthode de Newton en partant de u0 = 0.8

c) On prend c = – 1 . La méthode de Newton converge-t-elle ?

2) Appliquer la méthode de Newton pour trouver des solutions de l'équation $x^3 - 1 = 0$. Selon les valeurs initiales, la méthode de Newton fournira la racine 1, j ou j^2 (et, dans certains cas, ne converge pas…). En colorant différemment les points selon le comportement de la méthode de Newton, dresser un graphe illustrant les bassins d'attractions de 1, de j et de j^2.