Devoir en temps libre n° 19

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME :Exponentielle de matrices. Mines de Sup 2001

*Les parties **B** et **C** sont liées, mais la partie **A** est indépendante du reste du problème.*

On rappelle que, si p est un entier naturel non nul, la notation $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ représente l'algèbre des matrices carrées d'ordre p à coefficients réels.

Partie A

Soit p un entier naturel non nul. Une matrice A de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$ est dite **nilpotente d'indice trois** si elle vérifie $A^2 \neq 0$ et $A^3 = 0$.

Dans toute cette partie, on note A une matrice de $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$, nilpotente d'indice trois. On note I la matrice-unité d'ordre p.

Pour tout réel t, on note $E(t)$ la matrice

$$E(t) = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2\,.$$

1. Vérifier la relation
$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)E(t) = E(s+t)\ .$$
2. En déduire que $(E(t))^n = E(nt)$ pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la matrice $E(t)$ est inversible. Quel est son inverse ?
4. Montrer que la famille (I, A, A^2) est libre dans l'espace vectoriel $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$.
5. En déduire que l'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathfrak{M}_p(\mathbb{R})$, est injective.
6. Dans cette question, $p = 3$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Expliciter la matrice $E(t)$ sous la forme d'un tableau matriciel pour $t \in \mathbb{R}$.

PARTIE B

Dans cette partie, on note $\mathcal{B}_0 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$. On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ qui lui est canoniquement associé.

1. Montrer que $F = \ker(f - 2\,Id_{\mathbb{R}^2})$ et $G = \ker(f - Id_{\mathbb{R}^2})$ sont deux droites vectorielles, supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
Préciser un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ de F, et un vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ de G.
2. Sans calculs, déterminer la matrice de l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
3. En déduire qu'il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale (toutes deux carrées d'ordre deux) telles que $A = PDP^{-1}$. Expliciter P, D et P^{-1}.
4. Expliciter D^n pour tout entier naturel n. Démontrer la relation $A^n = P\,D^n\,P^{-1}$. En déduire l'expression de A^n sous forme de tableau matriciel.

Partie C

On reprend les notations de la partie **B**.

1. En utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange, montrer que, pour tout réel t, on a
$$e^t = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right) .$$

2. Pour tout réel t, pour tout entier naturel n, on note $E_n(t)$ la matrice définie par $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k$. On écrira cette matrice sous la forme $E_n(t) = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$.
Expliciter (sous forme de sommes) ses coefficients $a_n(t)$, $b_n(t)$, $c_n(t)$, $d_n(t)$.

3. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $E(t)$ la matrice $E(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$, avec $a(t) = \lim_{n\to+\infty} a_n(t)$, $b(t) = \lim_{n\to+\infty} b_n(t)$, etc. Expliciter la matrice $E(t)$.

4. Montrer qu'il existe deux matrices Q et R (carrées d'ordre deux) telles que
$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad E(t) = e^{2t}\, Q + e^t\, R$$
et expliciter Q et R.

5. Calculer les matrices Q^2, R^2, QR, RQ. Que peut-on dire des endomorphismes q et r de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés aux matrices Q et R (*on pourra préciser la réponse en utilisant les droites F et G de la question* **B.1**.) ?

6. En déduire que
$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2 \qquad E(s)E(t) = E(s+t) .$$
Que dire de $(E(t))^n$ pour $n \in \mathbb{N}$?, de $(E(t))^{-1}$?

   L'application $E : t \mapsto E(t)$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$, est-elle injective ?

CORRECTION

2. $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$ avec : $a_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$

$b_n(t) = 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$, $c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ et $d_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$

3. D'après la question **1.**, on sait que $e^t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ et que $e^{2t} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} (a_n(t)) = \boxed{a(t) = 3e^{2t} - 2e^t}$

De même, $\boxed{b(t) = 6e^t - 6e^{2t}}$, $\boxed{c(t) = e^{2t} - e^t}$ et $\boxed{d(t) = 3e^t - 2e^{2t}}$

D'où la matrice $\mathbf{E(t)} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & 6e^t - 6e^{2t} \\ e^{2t} - e^t & 3e^t - 2e^{2t} \end{pmatrix}$

4. On a alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = e^{2t} Q + e^t R$ avec

$Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

5. On a : $Q^2 = Q$, $R^2 = R$, $QR = 0_2$ et $RQ = 0_2$.

Ainsi, en notant q et r les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à Q et R, on a q et r deux projecteurs (car $q^2 = q$ et $r^2 = r$) associés (car $q \circ r = r \circ q = 0$ et $q + r = \mathrm{Id}$).
De plus, en cherchant les noyaux de q et de r, on trouve $\mathrm{Ker}(q) = G$ et $\mathrm{Ker}(r) = F$.
Ainsi $\boxed{\text{q (resp. r) est le projecteur d'axe F (resp. G) et de direction G (resp. F)}}$

6. $E(s)E(t) = (e^{2s}Q + e^sR)(e^{2t}Q + e^tR) = e^{2(t+s)}Q + e^{(t+s)}R$ car $R^2 = R$, $Q^2 = Q$ et $QR = RQ = 0$ D'où : $\boxed{\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, E(s)E(t) = E(s+t)}$ (*)

Par récurrence (la même que dans la partie I), on montre: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, E(nt) = (E(t))^n}$

En utilisant la formule (*), on montre que $\boxed{\text{E(t) inversible d'inverse E(–t)}}$

Soit $(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid E(t) = E(s)$. On a :

$e^{2s}Q + e^sR = e^{2t}Q + e^tR \Leftrightarrow (e^{2s} - e^{2t})Q + (e^s - e^t)R = 0_2$

Or la famille (Q,R) est libre car Q et R sont deux matrices non colinéaires, donc on a $e^{2t} = e^{2s}$ et $e^t = e^s$ i.e. $\boxed{t = s}$

Ainsi l'application $\boxed{\text{E est injective}}$

2. $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$ avec : $a_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$

$b_n(t) = 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$, $c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ et $d_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$

3. D'après la question **1.**, on sait que $e^t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ et que $e^{2t} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} (a_n(t)) = \boxed{\mathbf{a(t) = 3\, e^{2t} - 2\, e^{t}}}$

De même, $\boxed{\mathbf{b(t) = 6\, e^{t} - 6e^{2t}}}$, $\boxed{\mathbf{c(t) = e^{2t} - e^{t}}}$ et $\boxed{\mathbf{d(t) = 3\, e^{t} - 2e^{2t}}}$

D'où la matrice $\mathbf{E(t)} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^{t} & 6e^{t} - 6e^{2t} \\ e^{2t} - e^{t} & 3e^{t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$

4. On a alors : $\forall t \in \mathbb{R}, E(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = e^{2t}\, Q + e^{t}\, R$ avec

$Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

5. On a : $\mathbf{Q^2 = Q}$ **,** $\mathbf{R^2 = R}$ **,** $\mathbf{QR = 0_2}$ **et** $\mathbf{RQ = 0_2}$**.**

Ainsi, en notant q et r les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à Q et R, on a q et r deux projecteurs (car $q^2 = q$ et $r^2 = r$) associés (car $q\circ r = r\circ q = 0$ et $q + r = Id$).

De plus, en cherchant les noyaux de q et de r, on trouve $Ker(q) = G$ et $Ker(r) = F$.

Ainsi $\boxed{\textbf{q (resp. r) est le projecteur d'axe F (resp. G) et de direction G (resp. F)}}$

6. $E(s)E(t) = (e^{2s}Q + e^{s}R)(e^{2t}Q + e^{t}R) = e^{2(t+s)}\, Q + e^{(t+s)}\, R$ car $R^2 = R$, $Q^2 = Q$ et $QR = RQ = 0$ D'où : $\boxed{\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, E(s)E(t) = E(s+t)}$ (*)

Par récurrence (la même que dans la partie I), on montre: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, E(nt) = (E(t))^n}$

En utilisant la formule (*), on montre que $\boxed{\textbf{E(t) inversible d'inverse E(–t)}}$

Soit $(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid E(t) = E(s)$. On a :

$e^{2s}Q + e^{s}R = e^{2t}Q + e^{t}R \Leftrightarrow (e^{2s} - e^{2t})Q + (e^{s} - e^{t})R = 0_2$

Or la famille (Q,R) est libre car Q et R sont deux matrices non colinéaires, donc on a $e^{2t} = e^{2s}$ et $e^{t} = e^{s}$ i.e. $\boxed{t = s}$

Ainsi l'application $\boxed{\textbf{E est injective}}$

2. $E_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$ avec : $a_n(t) = 3 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$

$b_n(t) = 6 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$, $c_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ et $d_n(t) = 3 \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$

3. D'après la question **1.**, on sait que $e^t = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ et que $e^{2t} = \displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$

Ainsi, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} (a_n(t)) = \boxed{\mathbf{a(t) = 3\, e^{2t} - 2\, e^{t}}}$

De même, $\boxed{\mathbf{b(t) = 6\, e^{t} - 6e^{2t}}}$, $\boxed{\mathbf{c(t) = e^{2t} - e^{t}}}$ et $\boxed{\mathbf{d(t) = 3\, e^{t} - 2e^{2t}}}$

D'où la matrice **E(t)** = $\begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^{t} & 6e^{t} - 6e^{2t} \\ e^{2t} - e^{t} & 3e^{t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$

4. On a alors : $\forall t \in \mathbb{R}$, $E(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = e^{2t}\, Q + e^{t}\, R$ avec

$Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

5. On a : $\mathbf{Q^2 = Q}$, $\mathbf{R^2 = R}$, $\mathbf{QR = 0_2}$ **et** $\mathbf{RQ = 0_2}$.

Ainsi, en notant q et r les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à Q et R, on a q et r deux projecteurs (car $q^2 = q$ et $r^2 = r$) associés (car $q \circ r = r \circ q = 0$ et $q + r = Id$).

De plus, en cherchant les noyaux de q et de r, on trouve Ker(q) = G et Ker(r) = F.

Ainsi $\boxed{\textbf{q (resp. r) est le projecteur d'axe F (resp. G) et de direction G (resp. F)}}$

6. $E(s)E(t) = (e^{2s}Q + e^{s}R)\,(e^{2t}Q + e^{t}R) = e^{2(t+s)}\,Q + e^{(t+s)}\,R$ car $R^2 = R$, $Q^2 = Q$ et $QR = RQ = 0$ D'où : $\boxed{\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, E(s)E(t) = E(s+t)}$ (*)

Par récurrence (la même que dans la partie I), on montre: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, E(nt) = (E(t))^n}$

En utilisant la formule (*), on montre que $\boxed{\textbf{E(t) inversible d'inverse E(–t)}}$

Soit $(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid E(t) = E(s)$. On a :

$e^{2s}Q + e^{s}R = e^{2t}Q + e^{t}R \Leftrightarrow (e^{2s} - e^{2t})Q + (e^{s} - e^{t})\,R = 0_2$

Or la famille (Q,R) est libre car Q et R sont deux matrices non colinéaires, donc on a $e^{2t} = e^{2s}$ et $e^{t} = e^{s}$ i.e. $\boxed{t = s}$

Ainsi l'application $\boxed{\textbf{E est injective}}$

PROBLEME 2

Partie A

1.

$$\begin{aligned}\forall(s,t)\in\mathbb{R}^2,\ E(s)E(t) &= (I+tA+\frac{t^2}{2}A^2)(I+sA+\frac{s^2}{2}A)\\ &= I+(s+t)A+(\frac{s^2}{2}+st+\frac{t^2}{2})A^2+(\frac{st^2}{2}+\frac{ts^2}{2})A^3+\frac{s^2t^2}{4}A^4\end{aligned}$$

A est nilpotente d'indice 3, donc $A^3=0$, d'où $A^4=A.A^3=0$.
Donc $E(s)E(t)=A+(s+t)A+\dfrac{(s+t)^2}{2}A^2=E(s+t)$.

2. Par récurrence on montre alors que $((E(t)^n))=E(nt)$ pour $n\in\mathbb{N}$.

3. $E(0)=I$. Donc $E(t)E(-t)=E(0)=I$.
La matrice $E(t)$ est donc inversible d'inverse $E(-t)$. Donc pour tout réel t, $E(t)\in GL_p(\mathbb{R})$.

4. Soient α, β, γ des réels tels que $\alpha I+\beta A+\gamma A^2=0$.
Multiplions cette égalité par A^2. On obtient $\alpha A^2+\beta.0+\gamma.0=0$ et donc $\alpha=0$.
En multipliant alors l'égalité par A, on déduit $\beta=0$ et donc $\gamma A^2=0$ avec $A^2\neq 0$. Donc $\alpha=\beta=\gamma=0$.
La famille (I,A,A^2) est libre.

5. Aux questions $A.1.$ et $A.3$ on a montré que E est un morphisme du groupe $(\mathbb{R},+)$ dans le groupe $(GL_p(\mathbb{R}))$.
Pour montrer que E est injective, on va chercher son noyau $\mathrm{Ker}(E)$.
$t\in\ker(E)\iff E(t)=I\iff I+tA+\dfrac{t^2}{2}A^2=I\iff tA+\dfrac{t^2}{2}A^2=0.$
Or la famille (I,A,A^2) est libre ; on déduit alors $t=0$ i.e. $\ker(E)=\{0\}$.
L'application E est donc injective de $\mathbb{R}$ vers $GL_p(\mathbb{R})$.

6. $A^2=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Longrightarrow E(t)=\begin{pmatrix}1&t&t+\frac{t^2}{2}\\0&1&t\\0&0&1\end{pmatrix}$.

Partie B

1.
   - Dans $\mathcal{B}_0$ la matrice de $f-2\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est $A-2I=\begin{pmatrix}2&-6\\1&-3\end{pmatrix}$
   Soit $u=(x,y)$. $u\in F\iff\begin{cases}2x-6y=0\\x-3y=0\end{cases}\iff x-3y=0$. On reconnaît l'équation, dans le plan, d'une droite vectorielle dont un vecteur directeur est $\vec{u}=(3,1)$.
   - Dans $\mathcal{B}_0$ la matrice de $f-\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$ est $A-I=\begin{pmatrix}3&-6\\1&-2\end{pmatrix}$
   Soit $v=(x,y)$. $v\in G\iff\begin{cases}3x-6y=0\\x-2y=0\end{cases}\iff x-2y=0$. On reconnaît, là encore l'équation d'une droite vectorielle dont un vecteur directeur est $\vec{v}=(2,1)$.
   - Montrons que F et G sont supplémentaires.
   $t\in F\cap G\iff\begin{cases}(f-2\mathrm{id})(t)=0\\(f-\mathrm{id})(t)=0\end{cases}\iff\begin{cases}f(t)=2t\\f(t)=t\end{cases}\Longrightarrow t=0$. Donc $F\cap G=\{\vec{0}\}$. Or $\dim(F)+\dim(G)=2=\dim(\mathbb{R}^2)$. Ceci achève de prouver que F et G sont supplémentaires.

2. $\vec{u}\in F$ donc $f(\vec{u})=2\vec{u}$. $\vec{v}\in G$ donc $f(\vec{v})=\vec{v}$. Donc la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est $\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}$.

3. Notons P la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$, et D la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
La formule de changement de base pour les endomorphismes se traduit, ici, par $D = P^{-1}AP$ ou encore $PDP^{-1} = A$ (on a multiplié l'égalité précédente à gauche par P et à droite par P^{-1}).
$P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4.
   - Par récurrence, on prouve que pour $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   - $A^n = (PDP^{-1})^n = (PDP^{-1})(PDP^{-1})...(PD^{-1}) = PD(P^{-1}P)D(P^{-1}P)D...DP^{-1}$ et donc $A^n = PD^nP^{-1}$. Ainsi $A^n = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.2^n - 2 & 6 - 6.2^n \\ 2^n - 1 & 3 - 2.2^n \end{pmatrix}$.

Partie C

1. La fonction exp est C^∞ sur $\mathbb{R}$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)} = \exp$. Alors $\forall n \in \mathbb{N},\ \exp^{(n)}(0) = 1$.
Soit $t \in \mathbb{R}$ et I le segment de bornes 0 et t (attention t peut être négatif). On sait que la fonction exp est croissante sur I.
Donc $\forall u \in I,\ \exp^{(n+1)}(u) \leqslant \text{Max}(1, e^t)$ noté M_t. Alors l'inégalité de Taylor Lagrange, appliquée à la fonction exp s'écrit :
$$\left| e^t - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right| \leqslant M_t \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!}$$
Or on sait (comparaison des fonctions puissances et des factorielles) que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = 0$. De plus M_t ne dépend pas de n. Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} M_t \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$ et donc $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right) = e^t}$.

2. $a_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(3.2^k - 2) = 3\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.
$b_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(6 - 6.2^k) = -6\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 6\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.
$c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(2^k - 1) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.
$d_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}(3 - 2.2^k) = -2\sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} + 3\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$.

3. En utilisant le résultat de C.1. appliqué au réel $2t$ on a : $\lim\limits_{t \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}$.
Alors : $a(t) = 3e^{2t} - 2e^t$, $\quad b(t) = -6e^{2t} + 6e^t$, $\quad c(t) = e^{2t} - e^t$, $\quad d(t) = -2e^{2t} + 3e^t$.
Ainsi $E(t) = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^t & -6e^{2t} + 6e^t \\ e^{2t} - e^t & -2e^{2t} + 3e^t \end{pmatrix}$.

4. $E(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^t \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. donc $Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

5. $Q^2 = Q$, $R^2 = R$, $RQ = QR = 0$ (calcul matriciel).
$Q^2 = Q \Longrightarrow q$ est une projection.
$R^2 = R \Longrightarrow r$ est une projection.
Remarquons que $Q = A - I$ et donc $\ker(q) = G$.
$R = -A + 2I$ et donc $\ker(r) = F$.
$q(u) = u \iff (f - \text{id})(u) = u \iff (f - 2\text{id})(u) = 0 \iff u \in F$. Donc q est la projection sur F de direction G.
$r(u) = u \iff (-f + 2\text{id})(u) = u \iff (f - \text{id})(u) = 0 \iff u \in G$. Donc r est la projection sur G de direction F.

6. •

$$\begin{array}{rcl} E(s)E(t) & = & \left(e^{2s}Q + e^{s}R\right)\left(e^{2t}Q + e^{t}R\right) \\ & = & e^{2(s+t)}Q^2 + e^{2s+t}QR + e^{s+2t}RQ + e^{s+t}R^2 \qquad \text{avec } QR = RQ = 0 \text{ et } Q^2 = Q,\ R^2 = R \\ & = & e^{2(s+t)}Q + e^{s+t}R \\ & = & E(s+t) \end{array}$$

- Alors, pour $n \in \mathbb{N}$, $(E(t)^n) = E(nt)$, $E(0) = I$.
  D'où, $E(-t)E(t) = E(0) = I$ et donc $(E(t))^{-1} = E(-t)$.

- $t \in \ker(E) \iff E(t) = I \iff \left\{ \begin{array}{c} 3e^{2t} - 2e^{t} = 1 \\ -6e^{2t} + 6e^{t} = 0 \\ e^{2t} - e^{t} = 0 \\ -2e^{2t} + 3e^{t} = 1 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} e^{t} = e^{2t} \\ e^{t} = 1 \end{array} \right. \iff t = 0.$

  Donc E est injective.