Devoir en temps libre n° 20

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Mines de SUP 2010, Epreuve Commune Pb II

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient 1a relation : $M \cdot {}^tM = {}^tM \cdot M \quad (1)$
Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire dans ce cas que la matrice M vérifie la relation (1).

PARTIE I :

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire ayant 2 lignes et 2 colonnes et des coefficients réels.
On notera en particulier :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1)
2. Calculer A^2. En déduire que pour tout, entier naturel non nul n, A^n vérifie la relation (1).
3. Montrer que A est inversible.

Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est A.

4. Préciser les valeurs de $u\left(\vec{i}\right)$ et $u\left(\vec{j}\right)$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

   Montrer que u est une symétrie. Préciser l'ensemble des vecteurs invariants.

Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

5. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer que, pour tout entier non nul n, il existe un réel α_n tel que $U^n = \alpha_n U$.

   En déduire que toutes ses puissances U^n, $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1)

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

6. Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.

   En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

7. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que M appartienne à E_2. On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2
8. En déduire que E_2 est la, réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on précisera pour chacun une base.
9. Etant données M et N deux matrices de E_2 a-t-on nécessairement $M \cdot N \in E_2$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

PARTIE II :

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathcal{B}'=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i}) = -\vec{k}$, $h\left(\vec{j}\right) = \vec{i}$, $h\left(\vec{k}\right) = \vec{j}$ ainsi que $S = mat_{\mathcal{B}'}(h)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1) est noté E_3.

1. Représenter la matrice S
2. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3.
3. Montrer que pour tous réels a, b et c la matrice $R = aI_3 + bS + cS^2$ appartient à E_3
4. En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que l'on notera F.
5. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

PARTIE III :

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $\mathcal{B}'' = (\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})$

On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

où a est un réel quelconque„ et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}''}(u) = B$

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4

1. Déterminer les réels a tels que $B \in E_4$.

Dans toute la suite on pose $a = -1$.

2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Calculer $u(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$ Que remarque-t-on
4. Calculer $B\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Commenter le résultat obtenu
5. On note $\mathcal{C} = (\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\ ,\ \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$ Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

   Déduire de la question précédente $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u)$

   En déduire l'existence d'une matrice $P \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $B = P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale.

   On ne demande pas d'expliciter la matrice P^{-1}.
6. Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad B^n = P\Delta^n P^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et de B^2.