SERIES NUMERIQUES

I) Généralités sur les séries de réels ou de complexes

Définition: Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(K)$ une suite numérique. On appelle **série associée à la suite U**, la suite $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$. La série est notée $\sum u_n$.

Les termes $S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$ sont appelées **les sommes partielles d'indice N** de la série $\sum u_n$

Définition: Soit $\sum u_n$ une série numérique. On dit que la série **est convergente** si la suite des sommes partielles $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Le cas échéant, on appelle **somme de la série $\sum u_n$** la limite de la suite des sommes partielles.

On la note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \lim_{N\to+\infty} S_N = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=0}^{N} u_k$

Dans le cas contraire on dit que **la série est divergente**.

Remarque: Le fait pour une série d'être convergente ou pas est sa "nature"

Exemple 1 : La série $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et sa somme est 1 (rem : somme télescopique)

Exemple 2 : La série $\sum \frac{1}{n!}$ est convergente et sa somme est e^1 (rem : Taylor reste intégral)

Exemple 3 : La série $\sum \frac{1}{n}$ est divergente (comparaison à la série de terme général $\ln(n+1) - \ln(n)$)

Définition: Soit $\sum u_n$ une série numérique convergente. Soit N un entier. On appelle **reste d'ordre N** de cette série, la quantité $R_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - S_N = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n - \sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n$

Proposition: Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et α et β deux scalaires.

Alors la série $\sum (\alpha u_n + \beta v_n)$ est convergente de somme $\alpha \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \beta \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$

Dem: Provient du résultat correspondant sur les suites convergentes.

Proposition: Soit $\sum u_n$ une série. Alors, si la série est convergente, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

Dem: Si S_n est la somme partielle d'ordre n, on a : $u_n = S_n - S_{n-1}$. Donc si la série converge, alors S_n et S_{n-1} convergent vers la même limite et donc u_n converge vers 0

Attention: La réciproque est fausse ! Exemple de la série harmonique

Remarque: Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas ou ne converge pas vers 0, alors on dit que la série $\sum u_n$ est **grossièrement divergente**.

Séries géomètriques

Propriété : Soit $a\in\mathbb{K}$. La série géométrique $\sum a^n$ converge si et seulement si $|a| < 1$

Dans ce cas, la somme de la série est $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ et le reste $R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} a^n$ vaut $\frac{a^{N+1}}{1-a}$

Dem: Si a vaut 1, la somme partielle S_n vaut n qui diverge.

Sinon, la somme partielle vaut n procède par récurrence sur n… $S_N = \sum_{k=0}^{N} a^k = \frac{1-a^{N+1}}{1-a}$ qui converge si et seulement si $|a| < 1$

Lien suite-série

Propriété : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{K}$. Alors la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont de même nature.En cas de convergence, on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} (u_{n+1} - u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_0$

Dem: Si S_N est la somme partielle d'ordre N de la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$, alors on a : $S_N = u_{N+1} - u_0$. Donc les suites de terme général S_n et u_n sont de même nature, et, dans le cas où il y a convergence, on a bien la relation proposée concernant les limites.

Exercice : Soit $\sum z_n$ une série de complexes. Déterminer la nature de cette série en fonction de ses séries "partie réelle" et "partie imaginaire". Le cas échéant, quelle est la somme ?

II) Séries à termes positifs

Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels positifs (ou nuls). Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$. Alors : $\sum u_n$ converge si et seulement si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée

Dem: Provient du fait que la suite des sommes partielles est croissante, donc sa convergence équivaut à sa majoration.

Remarque : Le résultat reste valable si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive à partir d'un certain rang. L'énoncé se généralise pour les séries dont le terme général est de signe constant à partir d'un certain rang.

Convergence par domination

Propriété : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries telles que : $\forall n \geqslant n_0,\ 0 \leqslant u_n \leqslant v_n$. Alors :

1) Si $\sum u_n$ diverge alors $\sum v_n$ diverge également

2) Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ converge également. De plus $\sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=N+1}^{+\infty} v_n$

Dem: D'après l'inégalité liant u_n et v_n, les sommes partielles de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont inférieures, à une constante près, à celles de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Remarque : Le résultat reste valable pour des séries à termes positifs avec $u_n = O(v_n)$.

Convergence par équivalence

Propriété : Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes réels positifs avec $u_n \sim v_n$.

Alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature

Dem: On utilise le résultat précédent car on a $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.

Remarque : Le résultat reste valable pour des séries à termes de signe constant au moins à partir d'un certain rang. Par contre le résultat n'est pas valable sans cette hypothèse.

Par exemple si $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \ln(1 + u_n)$, $\sum u_n$ converge alors que $\sum v_n$ diverge.

III) Comparaison à une intégrale

Comparaison série-intégrale dans le cas monotone

Propriété : Soit f une fonction continue par morceaux et monotone sur $[n_0, +\infty[$.

Alors : $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,dt\right)_{n \geqslant n_0}$ converge

Dem: On va travailler dans le cas où f est décroissante. On constate d'abord que si f n'admet pas 0 pour limite en $+\infty$, la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f(n)$ est grossièrement divergente alors que la suite $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,dt\right)_{n \geqslant n_0}$ diverge également (car la différence entre deux termes successifs ne tend pas vers 0) . On suppose maintenant que f admet 0 pour limite en $+\infty$ (et dans ce cas f est positive).

Soit $n > n_0$. Pour tout $k \in [\![n_0, n-1]\!]$, on a : $\forall t \in [k, k+1]$, $f(k) \leqslant f(t) \leqslant f(k+1)$ et donc $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k}^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k+1)$. Ainsi en sommant pour $k \in [\![n_0, n-1]\!]$, on trouve $\displaystyle\sum_{k = n_0}^{n-1} f(k) \leqslant \int_{n_0}^{n} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k = n_0+1}^{n} f(k)$. Ainsi $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f(n)$ et $\left(\displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,dt\right)_{n \geqslant n_0}$ sont de même nature.

Remarque : On montre que, si f a 0 pour limite en $+\infty$, et, si on note S_n et R_n les sommes partiels et restes partiels on a :

- **si la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f(n)$ diverge (donc vers $+\infty$), $S_n \sim \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)\,dt$**
- **si la série $\sum\limits_{n \geqslant n_0} f(n)$ converge, $R_n \leqslant \displaystyle\int_{n}^{+\infty} f(t)\,dt \leqslant R_{n-1}$**

Séries de Riemann

Propriété : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors : $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

Dem: On est bien dans le cadre d'une fonction f continue et monotone avec $f(t) = \dfrac{1}{t^\alpha}$. On peut donc utiliser la comparaison précédente.

Si $\alpha = 1$, $\displaystyle\int_{1}^{n} f(t)\,dt = \ln(n)$ qui diverge. Si $\alpha \neq 1$, $\displaystyle\int_{1}^{n} f(t)\,dt = \frac{1}{1-\alpha}(n^{1-\alpha} - 1)$ qui est convergente si et seulement si $\alpha > 1$

Remarque : La fonction zeta de Riemann est la fonction définie par $\zeta(\alpha) = \displaystyle\sum_{n = 1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$. On peut montrer $\zeta(2) = \dfrac{\pi^2}{6}$

Exercice : Soit la série de Bertrand $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$. Montrer qu'elle converge ssi $\alpha > 1$ ou $(\alpha = 1$ et $\beta > 1)$

IV) Comparaison à une série de référence

Proposition: Comparaison à une série de Riemann. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels positifs.

- **Si il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\alpha u_n = 0$, alors $\sum u_n$ converge. Plus généralement, s'il existe $\alpha > 1$ tel que $\left(n^\alpha u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, alors $\sum u_n$ converge**
- **Si $\left(n\, u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite strictement positive, alors $\sum u_n$ diverge. Plus généralement, si $\left(n\, u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est minorée par un réel strictement positif, $\sum u_n$ diverge.**

Dem: Pour le premier point, si $\left(n^\alpha u_n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, on a : $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{M}{n^\alpha}$ Donc on a convergence de la série $\sum u_n$ Pour le second point , on a $u_n \geqslant \frac{M}{n}$ avec $M > 0$, donc on a divergence de la série $\sum u_n$.

Proposition: Comparaison à une série géométrique : Règle de d'Alembert.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels strictement positifs. On suppose que $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

- **Si $0 \leqslant \alpha < 1$, alors $\sum u_n$ converge.**
- **Si $\alpha > 1$, alors $\sum u_n$ diverge.**
- **Si $\alpha = 1$, on ne peut rien dire, sauf si $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1^+$ auquel cas $\sum u_n$ diverge.**

Dem: * Pour le premier point, soit $q\in]\alpha, 1[$. Il existe un rang n_0 à partir duquel $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est majotré par q. On a alors l'existence d'un réel positif M tel que pour tout $n \geqslant n_0$, $0 \leqslant u_n \leqslant M q^n$. Donc on a convergence de la série $\sum u_n$.

- Pour le second point (et le deuxième cas du troisième), on constate qu'il n'est alors possible que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- L'application de la règle de d'Alembert aux séries de Riemann avec le paramètre 1 ou 2, montre que des suites de nature différente peuvent vérifier la condition $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$

V) Séries absolument convergentes

Définition: Soit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S(K)$ une suite numérique. On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** si la série $\sum |u_n|$

Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite numérique. Si la série est absolument convergente alors elle est convergente. De plus, $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Dem: On travaille d'abord dans le cas des séries de réels. on note $t_n = |u_n|$, $v_n = u_n^+$ et $w_n = u_n^-$

Les séries sont à termes positifs et on a $v_n \leqslant t_n$ et $w_n \leqslant t_n$. Ainsi, par majoration par une série convergente, les séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes. Donc leur différence $\sum u_n$ est également convergente.

En raisonnant sur les parties réelles et imaginaires, on montre qu'il en est de même pour une série complexe.

Ensuite on constate que les modules des sommes partielles sont inférieurs aux sommes partielles des modules. D'où le résultat sur les sommes.

Proposition: Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite complexe et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de réels positifs. Si on suppose que $u_n = O(v_n)$ et que $\sum v_n$ converge. Alors $\sum u_n$ est absolument convergente et donc convergente.

Dem: On a $|u_n| = O(v_n)$ et on utilise le résultat correspondant sur les séries de termes positifs.

VI) Représentation décimale des réels

Proposition: Soit $x\in[0,1[$. Alors il existe une unique suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- **$\forall n\in\mathbb{N}^*, a_n\in[\![0,9]\!]$ et $\forall n_0\in\mathbb{N}^*, \exists n\geqslant n_0 \mid a_n \neq 9$**
- **$x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$**

Définition: Cette écriture $x = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$ est appelé **développement décimal** propre du réel x.

Dem: Existence. On constate d'abord que la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n 10^{-n}$ existe bien car on a une série de réels positifs majorée par $\sum_{n\geqslant 1} 9\,10^{-n}$. Par ailleurs, on constate que la somme partielle d'ordre N est la valeur décimale approchée à 10^{-N} par défaut de x.
Enfin, si à partir du rang N on avait que des 9, le reste partiel d'ordre N serait de 10^{-N} et donc x serait égal $S_N + 10^{-N}$.
Unicité. Provient de la remarque sur la valeur décimale approchée à 10^{-N} près par défaut, qui est unique…

Remarque: Si x est un réel quelconque, en l'écrivant sous la forme $x = E(x) + (x - E(x))$ et en écrivant $E(x)$ en base 10, on obtient **le développement décimal propre de x** sous la forme $x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n 10^{-n}$ avec :

- tous les a_n sont dans $[\![0, 9]\!]$
- les a_n ne sont pas tous égaux à 9 au voisinage de $+\infty$
- les a_n sont tous nuls au voisinage de $-\infty$