Devoir en temps libre n° 20

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Mines de SUP 2010, Epreuve Commune Pb II

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient 1a relation : $M \cdot {}^tM = {}^tM \cdot M \quad (1)$
Dans la suite de l'énoncé, on se contentera alors de dire dans ce cas que la matrice M vérifie la relation (1).

PARTIE I :

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire ayant 2 lignes et 2 colonnes et des coefficients réels.
On notera en particulier :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les matrices A et C vérifient la relation (1)
2. Calculer A^2. En déduire que pour tout, entier naturel non nul n, A^n vérifie la relation (1).
3. Montrer que A est inversible.

Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est A.

4. Préciser les valeurs de $u\left(\vec{i}\right)$ et $u\left(\vec{j}\right)$ en fonction de $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

   Montrer que u est une symétrie. Préciser l'ensemble des vecteurs invariants.

Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

5. Montrer que la matrice U vérifie la relation (1). Montrer que, pour tout entier non nul n, il existe un réel α_n tel que $U^n = \alpha_n U$.

   En déduire que toutes ses puissances U^n, $n \in \mathbb{N}^*$ vérifient (1)

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

6. Calculer les produits de la matrice $A + C$ et de sa transposée.

   En déduire que E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Etant donnée une matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c et d pour que M appartienne à E_2. On donnera les deux formes possibles des matrices de E_2
8. En déduire que E_2 est la, réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dont on précisera pour chacun une base.
9. Etant données M et N deux matrices de E_2 a-t-on nécessairement $M \cdot N \in E_2$? On pourra utiliser certaines matrices introduites précédemment dans l'énoncé.

PARTIE II :

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathcal{B}'=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i})=-\vec{k}$, $h\left(\vec{j}\right)=\vec{i}$, $h\left(\vec{k}\right)=\vec{j}$ ainsi que $S=mat_{\mathcal{B}'}(h)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$
L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1) est noté E_3.

1. Représenter la matrice S
2. Déterminer S^2 et montrer que S et S^2 sont dans E_3.
3. Montrer que pour tous réels a, b et c la matrice $R=aI_3+bS+cS^2$ appartient à E_3
4. En déduire que E_3 contient un espace vectoriel de dimension 3 que l'on notera F.
5. Montrer que F est stable par multiplication matricielle.

PARTIE III :

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $\mathcal{B}''=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3},\overrightarrow{e_4})$

On définit la matrice B par : $B=\begin{pmatrix}1&a&1&1\\-1&0&0&1\\1&0&0&-1\\1&1&-1&1\end{pmatrix}$

où a est un réel quelconque,, et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\mathrm{mat}_{\mathcal{B}''}(u)=B$
L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4

1. Déterminer les réels a tels que $B\in E_4$.

Dans toute la suite on pose $a=-1$.

2. Déterminer une base de $\ker(u)$ et de $\mathrm{Im}(u)$.
3. Calculer $u(\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}-\overrightarrow{e_4})$ Que remarque-t-on
4. Calculer $B\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$. Commenter le résultat obtenu
5. On note $\mathcal{C}=(\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}\ ,\ \overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}-\overrightarrow{e_3}-\overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}+\overrightarrow{e_3}-\overrightarrow{e_4})$ Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

   Déduire de la question précédente $\mathrm{mat}_{\mathcal{C}}(u)$

   En déduire l'existence d'une matrice $P\in\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ que l'on précisera telle que $B=P\Delta P^{-1}$, où Δ est une matrice diagonale.

   On ne demande pas d'expliciter la matrice P^{-1}.
6. Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad B^n=P\Delta^nP^{-1}$. En déduire une expression simple de B^{2p} et B^{2p+1} pour tout entier naturel p en fonction de B et de B^2.

CORRECTION

Le but de ce problème est d'étudier différentes matrices qui commutent avec leur transposée, c'est-à-dire qui vérifient 1a relation : $M \cdot {}^tM = {}^tM \cdot M \quad (1)$

PARTIE I :

Dans toute cette partie, toutes les matrices envisagées seront dans l'espace $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ c'est-à-dire ayant 2 lignes et 2 colonnes et des coefficients réels. On notera en particulier :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. On remarque que ${}^tA = A$ donc ${}^tA\,A = A^2 = A\,{}^tA$

   et de même ${}^tC = -C$ donc ${}^tC\,C = -C^2 = C\,{}^tC$ et $\boxed{\textbf{les matrices } A \textbf{ et } C \textbf{ vérifient la relation } (1)}$

2. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   Donc, pour n pair on a $A^n = I$ et pour n impair, $A^n = A$

   $\boxed{\textbf{pour tout, entier naturel non nul } n, \ A^n \textbf{ vérifie la relation } (1).}$

3. Comme $A^2 = I$ alors $\boxed{A \ \textbf{ est inversible et } A^{-1} = A}$

Soit u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice relative à la base canonique $\mathcal{B} = \left(\vec{i}, \vec{j}\right)$ est A.

4. Comme $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\boxed{u\left(\vec{i}\right) = 0\vec{i} + 1\vec{j} = \vec{j} \textbf{ et de même } u\left(\vec{j}\right) = \vec{i}}$

   u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et comme $A^2 = I$ alors $u^2 = \mathrm{Id}$. Ainsi $\boxed{u \textbf{ est une symétrie}}$

   $u\left(\vec{v}\right) = \vec{v} \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff x = y$

   les vecteurs invariants sont donc $\left\{y\vec{i} + y\vec{j} | y \in \mathbb{R}\right\} = \mathrm{Vect}\left(\vec{i} + \vec{j}\right)$

Dans toute la suite on notera $U = A + I$.

5. $U = A + I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est symétrique donc ${}^tU\,U = U^2 = U\,{}^tU$

   $U^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2U$

   On montre alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $U^n = 2^{n-1}U$

   ou directement : $U^{n+1} = U^{n-1}U^2$ si $n - 1 \geqslant 0$ et $U^{n+1} = 2U^n$ suite géométrique matricielle de premier terme U^1 donc $\boxed{U^n = 2^{n-1}U^1}$

   On aura ${}^tU^n = 2^{n-1}\,{}^tU = 2^{n-1}\,{}^tU = 2^{n-1}U$ et donc ${}^tU^n\,U^n = 2^{2n-2}U = U^n\,{}^tU^n$

   et $\boxed{U^n \textbf{ vérifie } (1) \textbf{ pour tout entier } n \geqslant 1 \textbf{ et pour } n = 0}$

On notera dans la suite E_2 l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ qui vérifient la relation (1).

6. On a $V = A + C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ et ${}^tV = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   Donc ${}^tV\,V = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

   et $V\,{}^tV = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

   $\boxed{\textbf{Donc } A + C \notin E_2}$

   Donc $+$ n'est pas une loi interne à E_2 et $\boxed{E_2 \textbf{ n'est pas un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R})}$

7. Soit $M=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

On a ${}^tM\,M=\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+c^2 & ab+cd \\ ab+cd & b^2+d^2 \end{pmatrix}$ et $M\,{}^tM=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}$

Donc $M\in E_2 \iff \begin{cases} a^2+c^2=a^2+b^2 \\ ab+cd=ac+bd \\ b^2+d^2=c^2+d^2 \end{cases} \iff \begin{cases} c=\pm b \\ ab+cd=ac+bd \end{cases}$

$\iff$ ou bien (1) $\{c=b$ ou bien $\begin{cases} c=-b \\ ab-bd=-ba+bd \end{cases} \iff \begin{cases} c=-b \\ b(a-d)=0 \end{cases}$ (2)

et (2) $\iff c=b=0$ (qui est contenu dans (1)) ou $\begin{cases} c=-b \\ a=d \end{cases}$

Les solutions sont donc $\boxed{M=\begin{pmatrix} a & b \\ b & d \end{pmatrix} \textbf{ matrice symétrique ou } M=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \textbf{ avec } a,\ b\in\mathbb{R}}$

8. Les solution sont donc ou bien Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$ famille génératrice et libre (échelonnée)

une base en est donc $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$

ou bien Vect $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ dont une base est (I,C)

9. On en essaye et on tombe sur $UC=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ qui n'est ni dans le premier ni dans le second des sous espaces composant E_2

$\boxed{\textbf{Donc } E_2 \textbf{ n'est pas stable pour } \times}$

PARTIE II :

On se place ici dans l'espace $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^3$ que l'on note $\mathcal{B}'=\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
On définit alors h comme l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ vérifiant : $h(\vec{i})=-\vec{k}$, $h\left(\vec{j}\right)=\vec{i}$, $h\left(\vec{k}\right)=\vec{j}$ ainsi que $S=mat_{\mathcal{B}'}(h)$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}'$. L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient (1) est noté E_3.

1. On récupère les coordonnées des images : et on a donc $S=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

2. $S^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ et on remarque que $S^2=-\,{}^tS$ et ${}^tS^2=-\,{}^t\,{}^tS=-S$

donc $S\,{}^tS=-S^3={}^tS\,S$ et $S\in E_3$ et comme ${}^tS^2\,S^2=-S^3=S^2\,{}^tS^2$ donc $S^2\in E_3$ également

3. Pour tous réels $a,\ b$ et c, soit $R=aI_3+bS+cS^2$ alors ${}^tR=aI-bS^2-cS$ donc
$R\,{}^tR=\left(aI_3+bS+cS^2\right)\left(aI-bS^2-cS\right)=\cdots$
${}^tR\,R=\left(aI-bS^2-cS\right)\left(aI_3+bS+cS^2\right)=\cdots$
Comme chacun des produit croisé commute, on a donc $R\,{}^tR={}^tR\,R$ et $\boxed{R\in E_3}$

4. L'ensemble $F=\left\{aI_3+bS+cS^2 \mid a,b,c\in\mathbb{R}\right\}=\text{Vect}\left(I_3,S,S^2\right)$ est donc un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ contenu dans E_3
$\left(I,S,S^2\right)$ en est génératrice.

Si $aI_3 + bS + cS^2 = 0$ alors $\begin{pmatrix} a & b & -c \\ c & a & b \\ -b & c & a \end{pmatrix} = 0$ et $a = b = c = 0$ (famille échelonnée)

Donc $\left(I, S, S^2\right)$ est une base de $F \subset E_3$

5. Dans le produit de deux matrices de F on trouve une combinaison de produits de I_3, S, et S^2 donc on trouve, I_3, S, S^2, S^3 et S^4

Et comme $S^3 = SS^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$

et donc $S^4 = -S$, le produit de deux matrices de F est donc une combinaison de I_3, S, et S^2 : une matrice de F

$\boxed{F \text{ est stable par multiplication matricielle.}}$

PARTIE III :

On se place à présent dans l'espace $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et on considère la base canonique de $\mathbb{R}^4$ que l'on note $\mathcal{B}'' = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}, \overrightarrow{e_4})$

On définit la matrice B par : $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

où a est un réel quelconque,, et on appelle u l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ tel que $\underset{\mathcal{B}''}{\mathrm{mat}}(u) = B$

L'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ qui commutent avec leur transposée (donc qui vérifient la relation (1)) est noté E_4

1. $B\,{}^tB = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+3 & 0 & 0 & a+1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ a+1 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

et ${}^tB\,B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & a+1 & 0 & 0 \\ a+1 & a^2+1 & a-1 & a+1 \\ 0 & a-1 & 2 & 0 \\ 0 & a+1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$B \in E_4 \iff \begin{cases} a^2+3 = 4 \\ a+1 = 0 \end{cases} \iff a = -1$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ qui est symétrique

2. $(x, y, z, t) \in \ker(u) \iff u(x, y, z, t) = 0$ et sur leurs coordonnées : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = 0$

$\iff \begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ -x + t = 0 \\ x - t = 0 \\ x + y - z - t = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -y + z + 2t = 0 \\ x = t \\ 0 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = 0 \\ x = t \\ 0 = 0 \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} t = 0 \\ x = 0 \\ 0 = 0 \\ y = z \end{cases}$

Donc $\ker(u) = \mathrm{Vect}((0, 1, 1, 0))$ et $(0, 1, 1, 0)$ est génératrice et libre (un vecteur non nul) de $\ker(u)$ est une base de $\ker(u)$

Méthode basique : les 4 colonnes (images des vecteurs de la base canonique) engendrent $\mathrm{Im}(u)$,

En notant les vecteurs=coordonnées en colonne :

$$\mathrm{Im}\,(u) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et avec } \begin{matrix} C_2 + C_1 \to C_2 \\ C_3 - C_1 \to C_3 \end{matrix}$$

$$=\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ échelonnée donc libre et } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } \mathrm{Im}\,(u)$$

D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}\,(u)) = 3$

(C_1, C_2C_3) sont libres : si $\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$ alors

$\begin{cases} \alpha - \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$ donc $\begin{cases} \beta = 2\alpha \\ \alpha = \gamma \\ 4\alpha = 0 \end{cases}$ d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille est libre de trois vecteurs de $\mathrm{Im}\,(u)$

$$\boxed{\textbf{Donc } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \textbf{ est une base de } \mathrm{Im}\,(u)}$$

3. Pour calculer $u\,(\overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$, on passe par les coordonnées :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

donc, avec $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}$ on a $u\,(\overrightarrow{x}) = -2\overrightarrow{x}$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. On note $\mathcal{C} = (\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}\ ,\ \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_4}\ ,\ \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} - \overrightarrow{e_4})$ et on admet sans démonstration que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$

On a vu que $\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3} \in \ker(u)$, donc $\mathrm{u}\,(\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{0}$ et $u\,(\overrightarrow{y}) = -2\overrightarrow{y}$,

et d'après les calculs sur les coordonnées (= les vecteurs) précédentes : $u\,(\overrightarrow{z}) = 2\overrightarrow{z}$ et $u\left(\overrightarrow{t}\right) = 2\,\overrightarrow{t}$

$$mat_{\mathcal{C}}\,(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \Delta \text{ et avec } P = mat_{\mathcal{B}''}\,(\mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Et d'après la formule de changement de base

$B = mat_{\mathcal{B}''}\,(u) = mat_{\mathcal{B}''}\,(\mathcal{C})\,mat_{\mathcal{C}}\,(u)\,mat_{\mathcal{C}}\left(\mathcal{B}''\right) = P\Delta P^{-1}$

6. Pa récurrence $B^1 = P\Delta P^{-1}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^n = P\Delta^n P^{-1}$ alors $B^{n+1} = B^n B = P\Delta^n P^{-1} P\Delta P^{-1} = P\Delta^{n+1}P$

Comme $2^{2p} = (-2)^{2p} = 4^p$ on a $\Delta^{2p} = 4^{p-1}\Delta^2$ et $\boxed{B^{2p} = 4^{p-1}B^2 \textbf{ et } B^{2p+1} = 4^p B}$