MPSI 15-16 Feuille n° 23 : Séries numériques

Du 12/05/16 au 22/05/16

Exercice 1. Étudier la convergence des séries $\sum u_n$ et déterminer leur somme :

1. $u_n = \dfrac{4\,n-3}{n\,(n^2-4)}$
2. $u_n = \dfrac{1}{2\,n\,(4\,n^2-1)}$ cf Ex 2
3. $u_n = \dfrac{1}{n^2+2\,i\,n-2}$
4. $u_n = \dfrac{2\,n-1}{n\,(n^2-4)}$
5. $u_n = \arctan \dfrac{1}{n^2+n+1}$
6. $u_n = \dfrac{n^2+n-3}{n!}$
7. $u_n = \dfrac{n^2+n-3}{(n+2)!}$
8. $u_n = \ln\left(\cos \dfrac{x}{2^n}\right)$ où $x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$

Exercice 2. Série harmonique alternée

Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$. Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite des sommes partielles : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$

1. Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(S_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
2. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.
3. Montrer que $S_n = \displaystyle\int_0^1 \left(\sum_{p=0}^{n-1} (-t)^p\right) dt = \ln(2) - \int_0^1 \frac{(-t)^n}{1+t} dt$.
4. En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$

Exercice 3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. Soit $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs. On suppose que la série $\sum n^2\, u_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum u_n$ est convergente.

Exercice 5. Constante d'Euler Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$ et soit $v_n = u_n - u_{n+1}$

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} v_n$ est une série à termes positifs convergente
2. En déduire qu'il existe un réel γ (appelé constante d'Euler) tel que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + \circ(1)$
3. Trouver un encadrement liant γ et u_n, puis trouver une valeur approchée à 10^{-2} de γ

Exercice 6. Étudier les séries $\sum u_n$ dont le terme gńéral est : (x, y et a sont strictement positifs)

1. $u_n = \dfrac{x^n}{n+y^n}$
2. $u_n = a^{\sqrt{n}}$
3. $u_n = e^{-\sqrt{n+1}}$
4. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{n^2}}$
5. $u_n = a^{\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$
6. $u_n = \dfrac{1}{n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$

Exercice 7. Étudier les séries $\sum u_n$ dont le terme gńéral est : (x strictement positif)

1. $u_n = \dfrac{1! + 2! + 3! + \cdots + n!}{(n+2)!}$
2. $u_n = n! \left(\dfrac{x}{n}\right)^n$
3. $u_n = \dfrac{(n\,x)^n}{n!}$
4. $u_n = \dfrac{(n+1)^{n-1}}{n!} x^n$
5. $u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

Exercice 8. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \displaystyle\int_0^\pi \left(at^2 + bt\right)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$.

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$. On pourra utiliser le fait que, si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$, $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi f(t)\sin(nt)dt = 0$ et $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi f(t)\cos(nt)dt = 0$