PROBLEME : Exponentielle de matrice. Corrigé

Partie I

A nilpotente d'ordre 3 , $E(t) = I + t\,A + \frac{t^2}{2}A^2$

1. Soit $(t,s)\in\mathbb{R}^2$. On a : $E(t)\,E(s) = (I + t\,A + \frac{t^2}{2}A^2)\,(I + s\,A + \frac{s^2}{2}A^2)$

D'où : $E(t)\,E(s) = I + sA + \frac{s^2}{2}A^2 + tA + tsA^2 + t\frac{s^2}{2}A^3 + \frac{t^2}{2}A^2 + s\frac{t^2}{2}A^3 + \frac{t^2}{2}\frac{s^2}{2}A^4$

Or $A^3 = A^4 = 0$, d'où $E(t)E(s) = I + (t+s)A + \frac{(s+t)^2}{2}A^2$ i.e. $\boxed{\mathbf{E(s)\,E(t) = E(s+t)}}$

2. Soit P_n la propriété de récurrence : " $\forall t\in\mathbb{R}$, $(E(t))^n = E(nt)$ "

- P_0 est vraie car $\forall t\in\mathbb{R}$, $(E(t))^0 = I = E(0t)$
- Si P_n est vraie. Soit $t\in\mathbb{R}$. On a : $(E(t))^{n+1} = E(t)\,(E(t))^n$. Or, puisque P_n est vraie, on a $(E(t))^n = E(nt)$. Ainsi $(E(t))^{n+1} = E(t)\,E(nt) = E(t+nt)$ d'après le **1.** Ainsi P_{n+1} est vraie.

Aussi, par le théorème de récurrence, $\forall n\in\mathbb{N}$, P_n est vraie i.e.

$\boxed{\forall n\in\mathbb{N}, \forall t\in\mathbb{R}, E(nt) = (E(t))^n}$

3. On a : $\forall t\in\mathbb{R}$, $E(t)E(-t) = E(0) = I$. Ainsi $\boxed{\textbf{E(t) inversible d'inverse E(–t)}}$

4. Soit $(\alpha, \beta, \gamma)\in\mathbb{R}^3 \mid \alpha\,I + \beta\,A + \gamma\,A^2 = 0_p$ (**a**).

En multipliant la relation (**a**) par A^2, on a, étant donné que $A^3 = A^4 = 0_p$, $\alpha A^2 = 0_p$

Or A n'est pas la matrice nulle, donc $\boxed{\alpha = 0_{\mathbb{R}}}$

En multipliant alors la relation (**a**) par A, on obtient $\beta A^2 = 0_p$ i.e. $\boxed{\beta = 0_{\mathbb{R}}}$

Puis en reprenant la relation (**a**) , on trouve $\boxed{\gamma = 0_{\mathbb{R}}}$.

$\boxed{\textbf{Ainsi la famille } (I, A, A^2) \textbf{ est libre dans } \mathcal{M}_p(\mathbb{R})}$

5. Soit $E : \mathbb{R} \to \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$, $t \to E(t) = I + t\,A + \frac{t^2}{2}A^2$. Soit $(t,s)\in\mathbb{R}^2 \mid E(t) = E(s)$

On a : $E(t) - E(s) = 0_p$ i.e. $(t-s)A + (\frac{t^2}{2} - \frac{s^2}{2})\,A^2 = 0_p$.

Or (A, A^2) libre donc <u>$t = s$</u>.

Ainsi $\boxed{\textbf{E est une application injective}}$.

6. Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ alors $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$ alors $\boxed{\mathbf{E(t)} = \begin{pmatrix} 1 & t & t+\frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Partie II

$\mathscr{B}_0 = (\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ base canonique de $\mathbb{R}^2$, $f \in L(\mathbb{R}^2)$ de matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in F = \ker(f - 2\,Id) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 2x \\ x - y = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\mathbf{F = vect}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{3} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right)$ On pose $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et on a (e_1) base de F

De même : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in G = \ker(f - Id) \Leftrightarrow A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = x \\ x - y = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

D'où $\mathbf{G = vect}\left(\begin{pmatrix} \mathbf{2} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}\right)$ On pose $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2$ et on a (e_2) base de G

F et G sont deux hyperplans de $\mathbb{R}^2$ distincts donc F+G est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ de dimension strictement supérieure à dim(F) = 1 donc $\boxed{\dim(F+G) = 2}$

D'autre part, $\boxed{\dim(F \cap G) = 0}$ d'après la formule de Grassmann

Aussi $\boxed{\textbf{F et G sous deux sous-espaces supplémentaires de } \mathbb{R}^2}$.

Comme (e_1) et (e_2) bases de F et G et $F \oplus G = \mathbb{R}^2$, on a $\boxed{\mathscr{B} = (e_1, e_2) \textbf{ base de } \mathbb{R}^2}$

2. $e_1 \in \ker(f - 2\,Id)$ donc $f(e_1) = 2\,e_1$. De même $f(e_2) = e_2$. D'où : $\mathbf{mat}_{\mathscr{B}}\mathbf{(f)} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

3. On pose P la matrice de passage de $\mathscr{B}_0$ vers $\mathscr{B}$ et D = $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

D'après la formule de changement de bases, on a $D = P^{-1} A P$ i.e. $\boxed{\mathbf{A = P\,D\,P^{-1}}}$

Ici on vérifie bien que $\boxed{\text{D est diagonale et P inversible}}$.

Remarque, on a ici $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

4. Comme D est diagonale, on a : $\forall n \in \mathbb{N},\ D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

De plus, par récurrence immédiate on montre : $\forall n \in \mathbb{N},\ A^n = P\,D^n\,P^{-1}$.

Ainsi, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbf{A^n} = \begin{pmatrix} \mathbf{3.2^n - 2} & \mathbf{6 - 6.2^n} \\ \mathbf{2^n - 1} & \mathbf{3 - 2.2^n} \end{pmatrix}}$

Partie III

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on sait d'après l'inégalité de Taylor–Lagrange appliquée à la fonction $\varphi = \exp$ à l'ordre n en 0 sur l'intervalle $I = [-|t|, |t|\,]$, que, étant donné que $\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi^{(k)}(0) = 1$ et $\sup\limits_{x \in I} |\varphi^{(n+1)}(x)| = e^{|t|}$: $\left| e^t - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \right| \leq \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|t|}$

Or, $|t|^n = o(n!)$ lorsque n tend vers $+\infty$, donc $\boxed{\mathbf{e^t = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k\,!}}}$

2. $E_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} A^k = \begin{pmatrix} a_n(t) & b_n(t) \\ c_n(t) & d_n(t) \end{pmatrix}$ avec : $a_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$

$b_n(t) = 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 6 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$, $c_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ et $d_n(t) = 3 \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} - 2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$

3. D'après la question **1.**, on sait que $e^t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!}$ et que $e^{2t} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$

Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} (a_n(t)) = \boxed{\mathbf{a(t) = 3\,e^{2t} - 2\,e^{t}}}$

De même, $\boxed{\mathbf{b(t) = 6\,e^{t} - 6e^{2t}}}$, $\boxed{\mathbf{c(t) = e^{2t} - e^{t}}}$ et $\boxed{\mathbf{d(t) = 3\,e^{t} - 2e^{2t}}}$

D'où la matrice $\mathbf{E(t)} = \begin{pmatrix} 3e^{2t} - 2e^{t} & 6e^{t} - 6e^{2t} \\ e^{2t} - e^{t} & 3e^{t} - 2e^{2t} \end{pmatrix}$

4. On a alors : $\forall t \in \mathbb{R}, \mathbf{E(t)} = e^{2t} \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + e^{t} \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = e^{2t}\,Q + e^{t}\,R$ avec

$Q = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ et $R = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

5. On a : $\mathbf{Q^2 = Q}$, $\mathbf{R^2 = R}$, $\mathbf{QR = 0_2}$ **et** $\mathbf{RQ = 0_2}$.

Ainsi, en notant q et r les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associés à Q et R, on a q et r deux projecteurs (car $q^2 = q$ et $r^2 = r$) associés (car $qor = roq = 0$ et $q + r = Id$).

De plus, en cherchant les noyaux de q et de r, on trouve Ker(q) = G et Ker(r) = F.

Ainsi $\boxed{\textbf{q (resp. r) est le projecteur d'axe F (resp. G) et de direction G (resp. F)}}$

6. $E(s)E(t) = (e^{2s}Q + e^{s}R)(e^{2t}Q + e^{t}R) = e^{2(t+s)}\,Q + e^{(t+s)}\,R$ car $R^2 = R$, $Q^2 = Q$ et $QR = RQ = 0$ D'où : $\boxed{\mathbf{\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2, E(s)E(t) = E(s+t)}}$ (*)

Par récurrence (la même que dans la partie I), on montre: $\boxed{\mathbf{\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, E(nt) = (E(t))^n}}$

En utilisant la formule (*), on montre que $\boxed{\textbf{E(t) inversible d'inverse E(–t)}}$

Soit $(t,s) \in \mathbb{R}^2 \mid E(t) = E(s)$. On a :

$e^{2s}Q + e^{s}R = e^{2t}Q + e^{t}R \Leftrightarrow (e^{2s} - e^{2t})Q + (e^{s} - e^{t})R = 0_2$

Or la famille (Q,R) est libre car Q et R sont deux matrices non colinéaires,

donc on a $e^{2t} = e^{2s}$ et $e^{t} = e^{s}$ i.e. $\boxed{t = s}$

Ainsi l'application $\boxed{\textbf{E est injective}}$