ESPACES PREHILBERTIENS REELS

A PRODUIT SCALAIRE, ORTHOGONALITE

On se place dans un ℝ espace vectoriel E

I) Produit scalaire

Produit scalaire

Définition: Soit φ une application de E ×E vers ℝ. On dit que φ est un **produit scalaire sur E** ssi c'est une forme bilinéaire symétrique définie positive, i.e., C'est une forme linéaire par rapport à chacune de ses variables et vérifiant :

$\forall(x,y) \in E\times E$, $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$, $\forall x\in E$, $\varphi(x,x) \geq 0$ et $\forall x\in E$, $\varphi(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Notation: On notera $<x|y>$ ou $(x|y)$ ou $<x,y>$ voire, en géométrie, $x .y$.

Exemple: – **Le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$** : $<x|y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

– Dans $\mathbb{R}_2[X]$, $(P,Q) \to P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$ est un produit scalaire.

– Dans **C ([a,b]), (f,g) → $\int_{[a,b]}$ fg est un produit scalaire**.

Espace préhilbertien

Définition: Un **espace préhilbert réel** est un ℝ-espace vectoriel muni d'un produit scalaire

Espace euclidien

Définition: On appelle **espace vectoriel euclidien** un espace vectoriel de dimension finie sur ℝ muni d'un produit scalaire

II) Norme associée à un produit scalaire

Norme associée à un produit scalaire

Théorème: L'application : E →ℝ, x →$||x|| = (<x|x>)^{1/2}$ est une norme.

Définition: On dit que c'est une **norme euclidienne sur E**

Dem: Le produit scalaire étant une forme positif, ||x|| existe et est bien positif.

- $\forall x \in E$, $||x|| = 0 \Leftrightarrow <x|x> = 0 \Leftrightarrow x = 0_E$
- $\forall x \in E$, $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $||\lambda x||^2 = \lambda^2 ||x||^2$ par bilinéarité. $\forall(x,\lambda)\in E\times\mathbb{R}$, $||\lambda x|| = |\lambda|\ ||x||$ (homogénéité)

– $\forall(x,y) \in E^2$, $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2 <x|y> \leq (||x|| + ||y||)^2$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz (cf plus bas). Comme ce sont des réels positifs, on en déduit l'inégalité triangulaire, qui s'appelle inégalité de Minkowski dans le cas d'une norme euclidienne: $||x+y|| \leq ||x|| + ||y||$ Aussi , on a bien une norme

Définition: On appelle **distance euclidienne sur E** l'application $d(x,y) = ||x-y||$

Propriété: Inégalité triangulaire $\forall(x,y,z) \in E^3$, $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème: Inégalité de Cauchy-Schwarz Soit E un ℝ-espace vectoriel. Soit <.|.> un produit scalaire sur E. Alors : $\forall(x,y) \in E^2$, $(<x|y>)^2 \leq ||x||^2\ ||y||^2$.

De plus on a égalité si et seulement si (x,y) liée.

Dem: Soit $(x,y)\in E^2$ avec y non nul. Soit l'application $\mathbb{R} \to\mathbb{R}$, $t \to f(t) = <x+ty|x+ty> = ||x+ty||^2$

f est un polynôme réel du second degré ayant pour coefficient dominant $||y||^2 > 0$. Or, par positivité du produit scalaire, son discriminant réduit Δ' est négatif et il n'est nul que si f admet une racine réelle. Or Δ' vaut $(<x|y>)^2 - <x|x> <y|y>$. D'où l'inégalité.

On a égalité (pour y non nul) si et seulement si $\exists t_0 \mid f(t_0) = 0 \Leftrightarrow \exists t_0 \mid x + t_0 y = 0$.

De plus si y est nul, on a bien égalité: On n'a égalité que si (x,y) liée.

Exercice: Etudier le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire

Exercice: Traduire l'inégalité de Cauchy Schwarz dans le cas du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ et dans le cas du produit scalaire dans $\mathscr{C}([a,b])$

Relations entre produit scalaire et norme

Proposition: Soit E un espace préhilbertien réel. On note <.|.> et ||.|| le produit scalaire et sa norme euclidienne associée. Soit $(x,y) \in E^2$, on a:

(i) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x|y\rangle$

(ii) $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2 \langle x|y\rangle$

(iii) $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2 \|x\|^2 + 2 \|y\|^2$ **Identité du parallélogramme (ou égalité de la médiane) :** **La somme des carrés des diagonales d'un parallélogramme est égales à la somme des carrés des cotés.**

(iv) $4 \langle x|y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$ **Identité de polarisation**

(v) $2 \langle x|y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$ **Formule de polarisation**

Dem: **(i)** $\|x+y\|^2 = \langle x+y|x+y\rangle = \langle x|x\rangle + \langle x|y\rangle + \langle y|x\rangle + \langle y|y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x|y\rangle$

(ii) on applique le résultat précédent à $-y$ **(iii)** = **(i)** + **(ii)** , **(iv)** = **(i)** – **(ii)** et **(v)** $\Leftrightarrow$ **(i)**

III) Orthogonalité

Vecteurs unitaires

Définition: On dit qu'un vecteur x est **unitaire** si et seulement si $\|x\| = 1$

Remarque: Si $x \neq 0_E$, le vecteur $\frac{x}{\|x\|}$ est toujours unitaire

Vecteurs orthogonaux

Définition: Soit $(x,y)\in E^2$. On dit que x et y sont **orthogonaux** $\Leftrightarrow \langle x|y\rangle = 0$

Définition: Soit A une partie de E. On appelle **orthogonal de A** l'ensemble $A^\perp$ des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A. $A^\perp = \{x \in E | \forall a \in A, \langle x|a\rangle = 0\}$

Structure d'un orthogonal.

Proposition : Soit A une partie de E. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Dem: Soient $(x,y) \in (A^\perp)^2$, $(\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2$. $\forall a \in A$, $\langle x|a\rangle = \langle y|a\rangle = 0$ donc $\langle \lambda x+\beta y|a\rangle = 0$.
Ainsi $\forall (x,y)\in (A^\perp)^2$, $\forall(\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda x+\beta y \in A^\perp$. De plus $A^\perp$ est non vide

Définition: Soit F et G deux s-e-v de E. On dit que F et G sont **orthogonaux** si et seulement si $\forall a \in F, \forall b \in G, \langle a|b\rangle = 0 \Leftrightarrow G \subset F^\perp \Leftrightarrow F \subset G^\perp$

Famille orthogonale

Définition: Soit $F = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E. On dit que F est une **famille orthogonale** si et seulement si $\forall(i,j)$, $i \neq j \Rightarrow \langle x_i|x_j\rangle = 0$.

Définition: Une famille est dite **orthonormale (ou orthonormée)** si et seulement si c'est une famille orthogonale de vecteurs unitaires.

Proposition: Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre

Dem: Soit $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs. Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires presque nulle telle que :
$\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E$. On a $\forall j \in I$, $0_{\mathbb{R}} = \left\langle x_j \,\middle|\, \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \right\rangle = \lambda_j \|x_j\|^2$ car la famille est orthogonale. Or $\|x_j\| \neq 0_{\mathbb{R}}$ car les vecteurs sont non nuls. Ainsi tous les λ_j sont nuls et donc la famille est libre.

Théorème de Pythagore Soit $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ une famille orthogonale. Alors $\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{p} \|x_i\|^2$

Dem: $\left\| \sum_{i=1}^{p} x_i \right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{p} x_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} x_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \left\langle x_j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p} x_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{p} \langle x_j | x_j \rangle$ car famille orthogonale.

Réciproque du théorème de Pythagore

Si x et y vérifient: $||x+y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2$ alors ils sont orthogonaux.

Dem: Provient de la formule de polarisation

Orthonormalisation de Schmidt

Théorème: Soit E un espace préhilbertien. Soit $\mathcal{B} = (e_1, .. , e_n)$ une famille libre de E. Alors il existe une unique famille $\mathcal{C}$ orthonormale $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_n)$ vérifiant :

(i) $\forall$ **k** $\in$**{1,..,n} , vect $(\varepsilon_1,..,\varepsilon_k)$ = vect $(e_1,..,e_k)$**

(ii) $\forall$ **k** $\in$**{1,..,n} , $(e_k|\varepsilon_k) > 0$**

Dem: On va construire les ε_k de manière unique de proche en proche.

☞ On considère $\varepsilon_1 = \frac{e_1}{||e_1||}$. Ce vecteur est unitaire et c'est le seul qui vérifie $(e_1|\varepsilon_1) > 0$ et vect (ε_1) = vect (e_1)

☞ On cherche alors ε_2 . Ce vecteur doit vérifier :

vect $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ = vect (e_1,e_2) **(a)** , $<\varepsilon_1|\varepsilon_2> = 0$ **(b)** , $||\varepsilon_2|| = 1$ **(c)** et $(e_k|\varepsilon_k) > 0$ **(d)**

(a) $\Rightarrow \exists(\lambda,\gamma) \in \mathbb{R}^2 \mid \varepsilon_2 = \lambda\, e_2 + \gamma\, \varepsilon_1$ avec $\lambda \neq 0$ sinon vect$(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ = vect$(\varepsilon_1) \neq$ vect(e_1,e_2)

(b) $\Rightarrow \lambda <e_2|\varepsilon_1> + \gamma <\varepsilon_1|\varepsilon_1> = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\lambda <e_2|\varepsilon_1>$

(c) $\Rightarrow <\varepsilon_2|\varepsilon_2> = 1 = \lambda <e_2|\varepsilon_2> + \gamma <\varepsilon_1|\varepsilon_2> = \lambda <e_2|\varepsilon_2>$

(d) $\Rightarrow \lambda > 0$

Aussi $\varepsilon_2 = \lambda\,(e_2 - <e_2|\varepsilon_1>\varepsilon_1)$ avec $\lambda = \frac{1}{||e_2 - <e_2|\varepsilon_1>\varepsilon_1||}$. Remarquons que $e_2 - <e_2|\varepsilon_1>\varepsilon_1$ est non nul sinon (e_2, ε_1) serait liée et donc (e_1,e_2) liée...

☞ On suppose construits $\varepsilon_1, .., \varepsilon_{k-1}$ tels que $(\varepsilon_1, .., \varepsilon_{k-1})$ soit une famille orthonormale et vect $(\varepsilon_1,..,\varepsilon_{k-1})$ = vect $(e_1,..,e_{k-1})$. On cherche à construire ε_k. On a :

- $\varepsilon_k = \lambda_k e_k + \sum_{j<k} \lambda_{k,j}\, \varepsilon_j$ avec $\lambda_k \neq 0$
- $\forall j<k, <\varepsilon_k | \varepsilon_j> = 0 \Leftrightarrow \forall j<k, \lambda_{k,j} = -\lambda_k < e_k|\varepsilon_j>$
- Aussi $\varepsilon_k = \lambda_k\,(e_k - < e_k|\varepsilon_1> \varepsilon_1 - ..- < e_k|\varepsilon_{k-1}> \varepsilon_{k-1})$. Or on veut $(e_k|\varepsilon_k) > 0$ donc il faut $\lambda_k > 0$: en effet en exprimant e_k en fonction des ε_j on a:

$\lambda_k e_k = \varepsilon_k + \lambda_k < e_k|\varepsilon_1> \varepsilon_1 + ..+ \lambda_k < e_k|\varepsilon_{k-1}> \varepsilon_{k-1}$ et donc $\lambda_k (e_k|\varepsilon_k) = ||\varepsilon_k||^2 > 0$

Enfin, comme on veut $||\varepsilon_k||^2 = 1$, on a $\lambda_k = \frac{1}{||e_k - < e_k|\varepsilon_1> \varepsilon_1 - ..- < e_k|\varepsilon_{k-1}> \varepsilon_{k-1}||}$. On remarque, comme pour le cas k = 2, que $e_k - < e_k|\varepsilon_1> \varepsilon_1 - ..- < e_k|\varepsilon_{k-1}> \varepsilon_{k-1} \neq 0_E$.

On a ainsi construit les ε_k de manière unique par récurrence.

Exemple 1: Dans $\mathbb{R}^3$ usuel, $e_1 = \begin{pmatrix}4\\7\\4\end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix}5\\11\\-4\end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}$ Orthonormaliser la base (e_1, e_2, e_3).

Réponse L'orthonormalisée est: $(\varepsilon_1, {}_2, \varepsilon_3)$ où $\varepsilon_1 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}4\\7\\4\end{pmatrix}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}1\\4\\-8\end{pmatrix}$, $\varepsilon_3 = \frac{1}{9}\begin{pmatrix}-8\\4\\1\end{pmatrix}$

Exemple2: Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de $<P|Q> = P(0)Q(0) + P'(0)Q'(0) + P''(0)Q''(0)$.

Othonormalisée de (I, X, X^2)? **Réponse :** $P_1 = I$ $P_2 = X$ $P_3 = \frac{X^2}{2}$

Exemple3: Dans $\mathbb{R}_2[X]$ muni de $<P|Q> = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(-1)Q(-1)$.

Othonormalisée de (I, X, X^2)? **Réponse :** $P_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} I$ $P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} X$ $P_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(3X^2 - 2I\right)$

B ESPACES VECTORIELS EUCLIDIENS

Définition: On rappelle qu'un **espace vectoriel euclidien** est un espace vectoriel de dimension finie sur ℝ muni d'un produit scalaire

I) Existence d'une base orthonormale

Existence de bases orthonormales

Théorème: Soit E un e.v. euclidien. Alors E possède au moins une base orthonormale

Dem: Soit B = $(e_1,\dots, e_n)$ une base de E. Par application de l'algorithm d'orthonormailsation de Schmidt, on trouve une famille orthonormale $((\varepsilon_1, .., \varepsilon_n)$ qui est donc une base orthonormale de E.

Théorème de la base orthonormale incomplète: Dans un espace vectoriel euclidien, on peut compléter une famille orthonormale en une base orthonormale.

Dem: On a une famille orthonormale dans un espace vectoriel de dimension finie, donc c'est une famille libre de p vecteurs que l'on peut compléter en une base. On orthonormalise par Schmidt, on obtient une base orthonormale dans laquelle les p premiers vecteurs sont des vecteurs de la famille orthonormale.

II) Expressions dans une base orthonormale

Soit B une base orthonormale de E. B = $(e_1,\dots, e_n)$

Expression des coordonnées dans une base orthonormale

Proposition: Soit $x \in E$. Alors $x = \sum_{i=1}^{n} < x|e_i > e_i$.

Dem: $x \in E \Rightarrow \exists(\lambda_1, \lambda_2,\dots , \lambda_n)\in\mathbb{R}^n \mid x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ donc $<x|e_i> = \lambda_1<e_1|e_i> +\dots+ \lambda_n<e_n|e_i> = \lambda_i<e_i|e_i> = \lambda_i$.

Aussi $x = \sum_{i=1}^{n} < x|e_i > e_i$.

Expression de la norme dans une base orthonormale

Relation (ou formule) de Parseval: Français (1755-1836)

Soit B= $(e_1,\dots, e_n)$ base orthonormale de E. Soit $x \in E$. Alors $||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} < x|e_i >^2}$.

Dem: Soit $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in E$. On a $\lambda_i = <x|e_i>$. On pose $x_i = \lambda_i e_i$. (x_i) est une famille orthogonale finie.

D'après Pythagore, $\left|\left| \sum_{i=1}^{n} x_i \right|\right|^2 = \sum_{i=1}^{n} ||x_i||^2$. Or $\sum_{i=1}^{n} x_i = x$ et $||x_i||^2 = \lambda_i^2<e_i|e_i> = \lambda_i^2 = <x|e_i>^2$

Aussi, $||x||^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 = \sum_{i=1}^{n} < x|e_i >^2$

Expression du produit scalaire dans une base orthonormale

Proposition: Soit B= $(e_1,\dots, e_n)$ base orthonormale de E. Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$

Alors, $<x|y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ ou encore, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $<x|y> = {}^tXY$.

Dem: $<x|y> = \left\langle \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j \left\langle e_j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle$

Or $\left\langle e_j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} y_i < e_j \,|\, e_i >$ et $<e_i|e_j> = \delta_{ij}$ Donc $\left\langle e_j \,\middle|\, \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \right\rangle = y_j$ et $<x|y> = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

Proposition: Soit B= $(e_1,\dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

Soit $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$. Alors $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2}$.

Dem: $d(x,y) = \|y-x\| = \|x-y\|$ or $x-y = \sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)e_i$ d'où $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i-y_i)^2}$.

.

C PROJECTION ORTHOGONALE

I) Supplémentaire orthogonal

Structure d'un orthogonal.

Proposition : Soit F un sous-espace de E. Alors $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Dem: Soient $(x,y) \in (F^\perp)^2$, $(\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2$. $\forall a \in F$, $<x|a> = <y|a> = 0$ donc $<\lambda x+\beta y|a> = 0$.
Ainsi $\forall (x,y) \in (F^\perp)^2$, $\forall (\lambda,\beta) \in \mathbb{R}^2$, $\lambda x+\beta y \in F^\perp$

Sous-espaces orthogonaux.

Théorème: Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie. Alors $F^\perp$ est un supplémentaire de F dans E.

Définition: $F^\perp$, l'orthogonal de F, s'appelle **supplémentaire orthogonal.**

Dem: * $F \cap F^\perp = \{x \in F \,/\, \forall y \in F, <x|y> = 0\}$.
En particulier, si $x \in F \cap F^\perp$, $<x|x> = 0$ donc $x = 0_E$.
* • Si $F = \{0_E\}$ alors $F^\perp = E$. Si $F = E$ alors $F^\perp = \{0_E\}$.
• Si $F \neq \{0_E\}$ et $F \neq E$. Soit n la dimension de F.Soit $B_1= (e_1,\dots, e_n)$ base orthonormale de F. Montrons que tout vecteur de E s'écrit comme somme d'un vecteur de F et d'un vecteur de $F^\perp$.

Soit $x \in E$. (l'idée suivante vient d'une analyse-synthèse) On pose : $y = \sum_{i=1}^{n} < x \,|e_i > e_i$ et $z = x - y$.

On a clairement : $x = y + z$, $y \in F$. Reste à vérifier $z \in F^\perp$.
On constate d'abord que, d'après l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée, on a , pour tout i :
$<y|e_i> = <x|e_i>$ et donc $<z|e_i> = 0$. Ainsi comme les e_i engendrent F, on a bien $z \in F^\perp$.
Donc $F \oplus F^\perp = E$.

Corollaire 1 : Si E est un espace euclidien, et F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

Corollaire 2 : Si E euclidien et F est un sous-espace vectoriel de E, alors $(F^{\perp})^{\perp} = F$.
Dem: $F \subset (F^{\perp})^{\perp}$ et ils ont même dimension.

II) Projections orthogonales

On se place dans un espace préhilbertien réel E.

Définition

Définition: Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle **projection orthogonale sur F** le projecteur sur F de direction son supplémentaire orthogonal $F^{\perp}$.

Définition: Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. On appelle **symétrie orthogonale sur F** la symétrie associée au projecteur orthogonal sur F, i.e., $s = 2p_F - Id_E$

Définition: On appelle **réflexion** une symétrie orthogonale d'axe un hyperplan.

Expression de la projection orthogonale d'un vecteur sur un sous-espace

Théorème: Soit F un sous-espace vectoriel de E et p la projection orthogonale sur F. Soit $(\varepsilon_1,\varepsilon_2,..,\varepsilon_q)$ une base orthonormale de F. Alors $\forall x \in E$, $p(x) = \sum_{i=1}^{q} (x|\varepsilon_i) \varepsilon_i$

Dem: ☑ $p(x) \in F$ donc $p(x)$ s'écrit sous la forme $p(x) = \sum_{i=1}^{q} \lambda_i \varepsilon_i$.

☑ $x - p(x) \in F^{\perp}$ donc $\forall i \in \{1,..,q\}$, $(x-p(x)|\varepsilon_i) = 0 \Rightarrow (x|\varepsilon_i) = (p(x)|\varepsilon_i) = \lambda_i$ CQFD

Exemple: La matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ de la projection orthogonale sur le plan d'équation $x +3y -z = 0$ est : $A = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} 10 & -3 & 1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 10 \end{pmatrix}$

Distance d'un point x à un sous-espace

Définition: Soit x un élément de E. Soit F un sous-espace vectoriel de E. On appelle **distance de x à F** la valeur $d(x,F) = \inf_{y \in F} d(x,y)$.

Remarque: Cette valeur existe car l'ensemble $\{d(x,y), y \in F\}$ est une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$.

Théorème: La distance de x à F est atteinte une et une seule fois en la projection orthogonale de x sur F.

Dem: Soit p le projecteur orthogonal de x sur F.
$\forall y \in F$, $d(x,y)^2 = \|x-y\|^2 = \|(x-p(x)) + (p(x)-y)\|^2 = \|x-p(x)\|^2 + \|p(x)-y\|^2$ par Pythagore.
D'où $\forall y\in F$, $d(x,y) \geq d(x,p(x))$ avec égalité si et seulement si $y = p(x)$.

D HYPERPLANS AFFINES D'UN ESPACE EUCLIDIEN

I) Vecteur normal à un hyperplan

Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension n.

Formes linéaires.

Soit f une forme linéaire sur E. * Si f = 0 , alors : $f: E \to \mathbb{R}, y \to <0|y>$
* Si $f \neq 0$. Soit H = Ker f . H est un hyperplan. Soit $(e_2, \dots, e_n)$ une base de H.
Soit $G = H^\perp$. G est une droite vectorielle: $\mathbb{R}x_0$ avec $x_0 \neq 0_E$.
On a $f(x_0) \neq 0_{IR}$ car $x_0 \notin H$ et $(x_0, e_2, \dots, e_n)$ est une base de E. Posons $f(x_0) = \lambda$ et $a = \frac{\lambda}{\|x_0\|^2} x_0$

Soit $\varphi: E \to \mathbb{R}, y \to <a|y>$. φ est une forme linéaire. $\varphi(x_0) = <a|x_0> = \frac{\lambda}{\|x_0\|^2}<x_0|x_0> = \lambda = f(x_0)$.

$\forall k \geq 2$, $\varphi(e_k) = 0$ car $a \in H^\perp$. Ainsi, φ et f coïncident sur une base de E, donc sur E. D'où le théorème:

Théorème: Toute forme linéaire f s'écrit de manière unique sous la forme $f(y) = <a|y>$ où $a \in E$.

Conséquence: Si H est un hyperplan vectoriel d'un espace eucliden, H est l'orthogonal d'un singleton : ces singletons constituent, avec le singleton $\{0_E\}$, une droite vectorielle orthogonale à H.

Vecteur normal

Définition: Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace eucliden E de direction H. On appelle **vecteur normal à $\mathcal{H}$** tout vecteur non nul de la droite vectorielle $D = H^\perp$

Propriété: Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace eucidien E. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{H}$. Soit A un point de $\mathcal{H}$. Alors on a l'équivalence : $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow (\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = 0$

Dem: $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H \Leftrightarrow (\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = 0$

Propriété: Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul d'un espace euclidien E. Soit A un point quelconque de E. On considère l'application f définie sur E par : $f(M) = (\vec{n} \mid \overrightarrow{AM})$. Alors les lignes de niveau de f, $\mathcal{H}_\lambda = \{M \in E \mid f(M) = \lambda\}$, sont les hyperplans de vecteur normal $\vec{n}$. En particulier $\mathcal{H}_0$ est l'hyperplan de vecteur normal $\vec{n}$ passant par A.

Dem: Soit D la droite passant par A et dirigée par $\vec{n}$. Si M est un point du plan et P sa projection orthogonale sur D , alors on a : f(M) = f(P) car le vecteur $\overrightarrow{PM}$ est orthogonal à $\vec{n}$.
Or $f(P) = x \|\vec{n}\|^2$ avec x tel que $\overrightarrow{AP} = x\,\vec{n}$.
Aussi, si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f(M) = \lambda \Leftrightarrow f(P) = \lambda \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{\lambda}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n} \Leftrightarrow P = B_\lambda$ où est l'unique point tel que $\overrightarrow{AB_\lambda} = \frac{\lambda}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}$
$\Leftrightarrow$ M appartient à l'hyperplan passant par B_λ et de vecteur normal $\vec{n}$.

II) Equations d'un hyperplan

Equations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal

On considère un espace euclidien E muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O\ \mathcal{B})$ où O est un point de E et $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$. On note $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ les coordonnées de $\vec{n}$ dans la base $\mathcal{B}$ et $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ les coordonnées de A dans le repère $\mathcal{R}$.

Propriété: Une équation de $\mathcal{H}$ est $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \lambda$ où $\lambda = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i$

Dem: Provient directement de la caractérisation : $M \in \mathcal{H} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \in H \Leftrightarrow (\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = 0$

Exemple 1: Dans le plan $\mathbb{R}^2$ la droite passant par (4,1) et orthogonale au vecteur (2,5) à pour équation : $2x + 5y = 13$

Exemple 2: Dans l'espace $\mathbb{R}^3$ le plan droite passant par (4,-5, -1)) et orthogonal au vecteur (1,3,-2) à pour équation : $x + 3y - 2z = -9$

Distance d'un point à un hyperplan affine

Propriété: Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine d'un espace euclidien E, passant par A et de vecteur normal unitaire $\vec{n}$. Soit M un point de E. Alors : $d(M, \mathcal{H}) = \left| (\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) \right|$

Dem: Soit P la projection orthogonale de M sur $\mathcal{H}$. On a l'existence de $x \in \mathbb{R}$ tel que : $\overrightarrow{PM} = x\,\vec{n}$
On a : $d(M,\mathcal{H}) = PM = |x|$ et $(\vec{n} \mid \overrightarrow{AM}) = (\vec{n} \mid \overrightarrow{PM}) = x$. D'où le résultat.

Exemple 1: Dans le plan $\mathbb{R}^2$, si $\mathcal{D}$ est la droite d'équation $ax + by + c = 0$ et M est le point de coordonnées (x_0, y_0), alors $d(M,\mathcal{D}) = \dfrac{|a.x_0 + b.y_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exemple 2: Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, si $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$ et M est le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0), alors $d(M,\mathcal{P}) = \dfrac{|a.x_0 + b.y_0 + c.z_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

III) Orientation d'un hyperplan

Orientation d'un hyperplan affine

Définition: Soit E un espace euclidien orienté de dimension p. Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine de E de direction H de vecteur normal $\vec{n}$. On oriente alors $\mathcal{H}$ de la façon suivante : **une base $(e_1,\dots, e_{p-1})$ de H est dite directe** si $(e_1, \dots, e_{p-1}, \vec{n})$ est une base directe de E.

Remarque: Un changement du choix du vecteur normal peut changer l'orientation de l'hyperplan. Ainsi en choisissant $-\vec{n}$ au lieu de $\vec{n}$, on inverse l'orientation de H (et donc de $\mathcal{H}$)

E ISOMETRIES VECTORIELLES

I) Automorphisme orthogonal ou isométrie vectoriel

Soit E un espace vectoriel euclidien.

Définition, caractérisations

Définition: Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est une **isométrie vectorielle** ssi f conserve la norme, i.e., $\forall x \in E$, $\|f(x)\| = \|x\|$

Théorème : Soit f un endomorphisme de E . Alors
f est une isométrie vectorielle ⇔ f conserve le produit scalaire : $\forall (x,y)\in E^2$, $(f(x)|f(y)) = (x|y)$

Dem: ☑ Si f conserve le produit scalaire, il conserve clairement la norme euclidienne.

☑ Si $f \in L(E)$ conserve la norme. Soit $(x,y) \in E^2$. On a, d'après les propriétés liant norme euclidienne et produit scalaire, $(f(x)|f(y)) = \frac{1}{2}\left(\|f(x) + f(y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2 \right)$.

Or f est un endomorphisme qui conserve la norme euclidienne, donc :

$(f(x)|f(y)) = \frac{1}{2}\left(\|f(x+y)\|^2 - \|f(x)\|^2 - \|f(y)\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right) = (x|y)$

D'où $f \in L(E)$ conserve le produit scalaire

Propriété: Soit f une isométrie vectorielle sur E. Alors f est un automorphisme de E

Dem: Soit f une isométrie vectorielle de E.

Soit $x \in \ker(f)$. On a $\|x\|^2 = (x|x) = (f(x)|f(x)) = (0|0) = 0$. Aussi f injectif et donc , comme E est de dimension finie, f est un automorphisme...

Remarque: On appellera aussi une isométrie vectorielle " **automorphisme orthogonal**"

Exemple: Les **symétries orthogonales,** et donc les réflexions**, sont des isométries** vectorielles. Attention, les projecteurs orthogonaux ne sont pas des automorphismes orthogonaux. En effet. Soit $x \in E$. $x = y + z$ avec y et z orthogonaux. $s(x) = y - z$ et donc $\|s(x)\|^2 = \|y\|^2 + \|z\|^2 = \|x\|^2$

Théorème : caractérisation à l'aide de l'image d'une base orthonormale: Soit f un endomorphisme de E et B une base orthonormale de E. Alors:
f est une isométrie vectorielle ⇔ l'image de B par f est une base orthonormale de E

Dem: On note $B = (e_1,..,e_n)$, et pour tout j , $f_j = f(e_j)$. Soit $C = (f_1,..,f_n)$.

☑ Si f est un automorphisme orthogonal, on a : $\forall (i,j)$, $(f_i|f_j) = (e_i|e_j) = \delta_{i,j}$.

Ainsi la famille C est orthonormale donc libre. Or elle est constituée de n vecteurs de E, c'est donc une base (donc c'est une base orthonormale)

☑ Si $f \in L(E)$ et C est une base orthonormale. Soit $(x,y) \in E^2$, $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ et $y = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i$.

f étant linéaire, on a : $f(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i f_i$ et $f(y) = \sum_{i=1}^{n} y_i f_i$.

En utilisant l'expression du produit scalaire dans la base orthonormale C , on a :

$\langle f(x) | f(y) \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \langle x | y \rangle$: f conserve bien le produit scalaire: c'est un automorphisme orthogonal

Remarque: Si $f \in L(E)$ transforme une base orthonormée en une autre base orthonormée, l'image de **toute** base orthonormale par f en est une.

Groupe orthogonal

Théorème : L'ensemble des automorphismes orthogonaux sur E (muni de la loi $\circ$) est un sous-groupe du groupe linéaire Gl(E).

Définition: On appelle ce groupe le **groupe orthogonal de E** et on le note O(E).

Dem: ☑ Tout automorphisme orthogonal est un automorphisme : $O(E)\subset Gl(E)$
☑ Id_E est un automorphisme orthogonal : O(E) est non vide
☑ la composée de deux automorphismes orthogonaux est un automorphisme orthogonal
☑ l'inverse (la bijection réciproque) d'un automorphisme orthogonal est orthogonal
D'où O(E) est un sous groupe de GL(E).

Exemple: Les symétries orthogonales et, en particulier, les réflexions sont des éléments de O(E).

II) Matrice orthogonale

Matrice orthogonale

Définition: Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que M est une **matrice orthogonale** ssi ${}^tM.M = I_n$

Caractérisations des matrices orthogonales

Caractérisation à l'aide des vecteurs colonnes :

Théorème : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $C_1, C_2, .., C_n$ ses vecteurs colonnes. Alors : M est orthogonale $\Leftrightarrow$ $(C_1,C_2,..,C_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Dem: On note $M = (m_{ij})$. On a : ${}^tM =(m'_{ij})$ avec $m'_{ij} = m_{ji}$.

Ainsi ${}^tM.M = C = (c_{ij})$ avec $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m'_{ik}\, m_{kj} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki}\, m_{kj} = (C_i \mid C_j)$ avec C_k les vecteurs colonnes de la matrice M.

Aussi M orthogonale $\Leftrightarrow {}^tM.M = I_n \Leftrightarrow \forall(i,j), (C_i \mid C_j) = \delta_{i,j} \Leftrightarrow (C_1,...,C_n)$ est une base orthonormale

Caractérisation à l'aide des vecteurs lignes :

Théorème : Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Soit $L_1, L_2, .., L_n$ ses vecteurs lignes. Alors : M est orthogonale $\Leftrightarrow$ $(L_1,L_2,..,L_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.

Dem: On constate que pour une matrice carrée, ${}^tM.M = I_n \Leftrightarrow M.{}^tM = I_n$ et donc M orthogonale ssi ${}^tM$ l'est

Groupe orthogonal

Propriété: L'ensemble O(n) des matrices orthogonales de $M_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe du groupe linéaire.

Définition: On l'appelle **groupe orthogonal d'ordre n** et on le note O(n) ou $O_n(\mathbb{R})$.

Dem: On vérifie aisément les stabilités caractérisant les sous-groupes….

Proposition : Soit E un espace euclidien, $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E, f un endomorphisme de E et $M = mat_{\mathcal{B}}(f)$. Alors : M est orthogonale ssi f est une isométrie vectorielle

Dem: On note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à M et $(e_1,..,e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$
$M \in O(n) \Leftrightarrow \forall(i,j), (C_i \mid C_j) = \delta_{i,j} \Leftrightarrow \forall(i,j), (f(e_i) \mid f(e_j)) = \delta_{i,j} \Leftrightarrow (f(e_1),..,f(e_n))$ est une base orthonormale de E.

III) Déterminant

Théorème : Si $M \in O(n)$ alors $\det(M) = \pm1$

Dem: ${}^tM.M = I_n$ donc : $\det({}^tM)\det(M) = 1 \Leftrightarrow (\det(M))^2 = 1 \Leftrightarrow \det(M) = \pm1$

Corollaire : $u \in O(E) \Rightarrow \det(u) = \pm1$

Remarque: On n'a évidemment pas la réciproque : par exemple $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin O(2)$

Remarque: On parle de matrice orthogonale positive (resp. négative) si det(M) = + 1 (resp. – 1). De même pour les isométrie vectorielle (on utilise aussie le terme directe ou indirecte)

Remarque : Une réflexion est une isométrie vectorielle négative (ou indirecte) déterminant une réflexion est égal à –1. En effet, dans une base orthonormale adaptée, la matrice de la réflexion est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 \end{pmatrix}$ dont le déterminant est –1

Groupe spécial orthogonal

Théorème : L'ensemble des automorphismes orthogonaux de E de déterminant +1 est un sous-groupe de O(E)

Définition: On appelle ce groupe le **groupe spécial orthogonal de E** et on le note SO(E) (ou $O^+(E)$) . On appelle **isométries vectorielles positives (ou rotations)** ses éléments

Dem: On vérifie les stabilités de sous-groupes.

Définition: On appelle **groupe spécial orthogonal (d'ordre n)** et on note SO(n) (ou $O_n(\mathbb{R})$) le sous-groupe de O(n) des matrices orthogonales de déterminant +1

Caractérisation des rotations à l'aide des images des bases orthonormales directes

Théorème: Soit E un espace euclidien orienté . Soit $r \in L(E)$. Alors:

$r \in SO(E) \Leftrightarrow$ l'image de toute BOND est une BOND $\Leftrightarrow$ l'image d'une BOND est une BOND

Dem: $r \in SO(E) \Leftrightarrow r \in O(E)$ et $\det(r)>0$ $\Leftrightarrow$ l'image d'une BON est une BON et l'image d'une base directe est directe

Produit mixte de n vecteurs dans un espace euclidien de dimension n

Théorème: Soit E un espace euclidien orienté de dimension n. Soit $F = (x_1,...,x_n)$ une famille de n vecteurs de E. Soit B et C deux BOND de E. Alors : $\det_B(F) = \det_C(F)$

Dem: $\det_B(F) = \det_B(C)\det_C(F) = \det_C(F)$ car $\det_C(B) = 1$

Définition: On appelle **produit mixte de la famille $(x_1,..,x_n)$** la valeur commune des déterminants de cette famille dans des BOND. On le note : $\mathrm{Det}(x_1,..,x_n) = [x_1,..,x_n]$.

Remarque: Dans $\mathbb{R}^3$, le produit mixte s'exprime sous la forme : $[x,y,z] = ((x \wedge y) \mid z)$ parle de matrice orthogonale positive (resp. négative) si det(M) = + 1 (resp. – 1). De même pour les isométrie vectorielle (on utilise aussie le terme directe ou indirecte)

Interprétation de la valeur absolue du produit mixte

Propriété: Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$. Alors $\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$ représente le volume du parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Dem: Si les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires le produit mixte et le volume sont nuls.

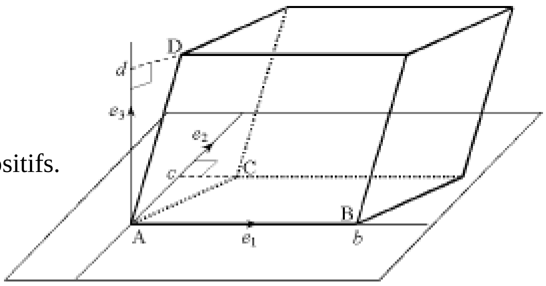
Sinon, on orthonormalise la famille ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$).

On trouve une base orthonormale (e_1, e_2, e_3) telle que :

$\vec{u} = b\, e_1$, $\vec{v} = c'\, e_1 + c\, e_2$ et $\vec{w} = d''\, e_1 + d'\, e_2 + d\, e_3$ avec b, c et d positifs.

Le produit mixte de ($\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$) vaut $\pm$ bcd selon que la base (e_1, e_2, e_3) soit directe ou non.

Mais bc représente l'aire du parallèlogramme de base et d est la hauteur donc bcd est bien le volume du parallélépipède.



F ISOMETRIES VECTORIELLES DU PLAN

I) Description des matrices orthogonales de taille 2

Théorème: 1) Soit $M\in SO(2)$. Alors: $\exists!\varphi\in[0,2\pi[\mid M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

2) Soit $M\in O(2)\backslash SO(2)$. Alors: $\exists!\varphi\in[0,2\pi[\mid M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$

Dem: 1) Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in SO(2)$. On a :

$a^2+b^2 = 1$ (1) , $c^2+d^2 = 1$ (2) , $ac + bd = 0$ (3) et $ad - bc = 1$ (4) .

De (1), on en déduit l'existence d'un unique $\varphi\in[0,2\pi[$ tel que $a = \cos\varphi$ et $b = \sin\varphi$.

De (2), on en déduit l'existence d'un unique $\theta\in[0,2\pi[$ tel que $c = \cos\theta$ et $d = \sin\theta$.

En remplaçant dans (3), on a $\cos(\varphi-\theta) = 0$ et donc $\exists\varepsilon\in\{-1,1\} \mid \cos\theta = -\varepsilon . \sin\varphi$ et $\sin\theta = \varepsilon . \cos\varphi$. Enfin la dernière relation donne $\varepsilon = 1$

Remarque: En fait on a démontré que les matrices de O(2) sont de deux types:

Soit $A\in SO(2)$ et alors $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Soit $A\notin SO(2)$ et alors $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$

On note $R(\varphi)$ cette matrice $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. On a $R(\varphi+\theta) = R(\varphi)R(\theta)$

On constate alors un lien entre la matrice $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ et le complexe $e^{i\varphi}$

Caractérisation des rotations à l'aide des matrices

Théorème: Soit E un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 2. Soit $r \in L(E)$. Alors:

r est une rotation $\Leftrightarrow \exists!\varphi\in[0,2\pi[\mid \forall$ B une BOND de E, $Mat_B(r) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Dem: Soit B et C deux BOND. $\exists!\varphi\in[0,2\pi[\mid Mat_B(r) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = R(\varphi)$.

Soit P la matrice de passage de B vers C . Comme ce sont deux BOND, P est une matrice orthogonale de déterminant positif. Donc $\exists!\theta\in[0,2\pi[\mid P = R(\theta)$. On a ${}^tP = P^{-1} = R(-\theta)$. Mais avec la formule de changement de bases orthonormales , on a :
$Mat_C(r) = {}^tP\, Mat_B(r)\, P$ D'où $Mat_C(r) = R(-\theta)\ R(\varphi)\ R(\theta) = R(\varphi) = Mat_B(r)$

Théorème: Classification des isométries d'un plan euclidien orienté Soit E un plan euclidien orienté. Soit $u \in O(E)$ est soit une réflexion soit une rotation

Dem: . Soit B une BOND quelconque de E. La matrice de u dans la base B est soit de la forme $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix}$ soit de la forme $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$

Dans le premier cas, on en déduit que u est la réflexion d'axe vect$\begin{pmatrix} \cos\frac{\varphi}{2} \\ \sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$(coordonnées expreimée dans la base B)

Dans le second cas, u est la rotation d'angle φ