Devoir en temps libre n° 21

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Constante d'Euler et accélération de convergence

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note : $H_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$, $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_{n-1} - \ln(n)$.
La constante d'Euler est le nombre réel : $\gamma = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

1. (a) Montrer l'existence de γ.
   (b) Donner un encadrement de γ d'amplitude $\frac{1}{10}$
   (c) Justifier la relation : $u_n - \gamma = \sum_{k=n}^{+\infty} \left(\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} \right)$
2. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et f la fonction définie sur $[k, k+1]$ par : $f(t) = \frac{1}{t}$. On note g la fonction affine sur $[k, k+1]$ et h la fonction affine sur $\left[k, k+\frac{1}{2}\right[$ et $\left[k+\frac{1}{2}, k+1\right]$ telles que :
   $f(k) = g(k) = h(k) \quad , \quad f(k+1) = g(k+1) = h(k+1) \quad , \quad f'(k) = h'(k) \quad \text{et} \quad f'(k+1) = h'(k+1)$
   (a) Représenter les courbes de f, g et h sur un même dessin, en justifiant leurs positions relatives.
   (b) Par des considérations d'intégrales, prouver que :
   $$\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} + \frac{1}{8(k+1)^2} - \frac{1}{8k^2} \leqslant \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) \leqslant \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)}$$
   (c) quelles inégalités peut-on en déduire pour $u_n - \gamma$?
3. (a) Donner le développement limité de $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1}$ suivant les puissances de $\frac{1}{k}$ lorsque k tend vers $+\infty$ à l'ordre 5.
   (b) Trouver des réels a, b et c tels que :
   $$\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - \frac{1}{k+1} - a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - b\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) \underset{k\to\infty}{\sim} c\left(\frac{1}{k^4} - \frac{1}{(k+1)^4}\right)$$
   (c) Démontrer alors que : $u_n - \gamma - \frac{a}{n} - \frac{b}{n^2} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{c}{n^4}$
4. Soit Φ l'endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ défini par $\Phi(P) = P(X+1) - P(X)$
   (a) Chercher $\mathrm{Im}(\Phi)$ et $\ker(\Phi)$.
   (b) En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme Q_p tel que $Q_p(0) = 0$ et $Q_p(X+1) - S_p(X) = X^p$.
   (c) Démontrer que, pour tout $p \geqslant 1$, $Q_p'(X) - Q_p'(0) = pQ_{p-1}(X)$
   (d) Calculer Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 et Q_5.
   (e) Déterminer les minimum et maximum de Q_5 sur $[0, 1]$
   (f) Montrer que, pour tout $p \in \mathbb{N}$, le polynôme Q_p est àcoefficients rationnels

5. Pour p et k deux entiers naturels non nuls, on pose : $I_p(k) = \displaystyle\int_0^1 \frac{pQ_{p-1}(t)}{(t+k)^{p+1}}\,dt$

   (a) Trouver une relation de récurrence entre I_p et I_{p+1}

   (b) Calculer $I_1(k)$.

   (c) A l'aide de la question 4e, donner un encadrement de $I_6(k)$. En déduire un encadrement de $u_n - \gamma$.

   (d) Donner les dix premières décimales de γ