Devoir en temps libre n° 22

Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies. Vous prêterez une attention particulière **au soin** de vos copies et à la qualité de votre argumentation

PROBLEME : Polynômes de Legendre

On note E le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$, et, pour tout entier n, $E_n = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynomes de degré inférieur ou égal à n.
On note D l'application linéaire de E vers E, qui à tout polynome P associe son polynome dérivé P'. Les puissances de D sont définies par : $D^0 = \mathrm{Id}_E$, $D^1 = D$ et $D^{k+1} = D^k \circ D$.
La valeur en t de la dérivée $k-$ième de la fonction polynome P sera donc notée $D^k(P)(t)$.
On définit $\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ par : $\forall (P,Q) \in E \times E, \varphi(P,Q) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = \left\langle P \middle| Q \right\rangle$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E. On notera $\|P\|$ la norme euclidienne de P associée à φ.

2. (a) Etablir qu'il existe une et une seule famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E telle que :
   * $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg(P_n) = n$
   ** $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\langle P_n \middle| X^n \right\rangle > 0$
   *** $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une base orthonormale de E_n.

   (b) Déterminer explicitement P_k pour $0 \leqslant k \leqslant 4$

   (c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est de la parité de n

3. On considère la famille $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, Q_n = \dfrac{1}{2^n n!} D^n\left(\left(X^2-1\right)^n\right)$ (Formule de Rodrigues)

   (a) En appliquant la formule de Leibniz à $D^n\left(\left(X^2-1\right)^n\right) = D^n\left((X-1)^n (X+1)^n\right)$, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2 (X-1)^{n-k} (X+1)^k$

   (b) Calculer, pour $k \in \{1, \cdots, n\}$, $D^k\left(\left(X^2-1\right)^n\right)(1)$ et $D^k\left(\left(X^2-1\right)^n\right)(-1)$.

   (c) Déterminer la parité de Q_n

   (d) Quel est le degré de Q_n ? En calculant le coefficient dominant de Q_n de deux manières différentes, donner une espression simple de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k}\right)^2$.

   (e) En utilisant plusieurs fois le théorème de Rolle, montrer que toutes les racines de Q_n sont réelles, distinctes et appartiennent à l'intervalle $]-1,1[$.

   (f) Soit $S \in E$. Montrer que $\left\langle Q_n \middle| S \right\rangle = \dfrac{(-1)^n}{2^n n!} \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right)^n D^n(S)(t)dt$

   (g) Soit $S \in E$ de degré strictement inférieur à n. Que dire de $\left\langle Q_n \middle| S \right\rangle$? En déduire la valeur de $\left\langle Q_n \middle| Q_m \right\rangle$ lorsque $m \neq n$.

   (h) Soit $I_n = \displaystyle\int_{-1}^{1} \left(t^2-1\right)^n dt$.
   Trouver, en intégrant I_n par parties, une relation liant I_n et I_{n-1}. En déduire l'expression de I_n en fonction de n. En déduire $\left\langle Q_n \middle| Q_n \right\rangle$.
   Calculer d'autre part $Q_n(1)$.

   (i) Prouver qu'il existe $\lambda_n \in \mathbb{R}$ tel que $Q_n = \lambda_n P_n$. Calculer λ_n.

4. Soit $n \geqslant 2$.
   (a) Soit $i \leqslant n-3$. Calculer $\left\langle XQ_{n-1} \middle| Q_i \right\rangle$
   (b) En déduire qu'il existe $(a_n, b_n, c_n) \in \mathbb{R}^3$ tel que : $XQ_{n-1} = a_n Q_n + b_n Q_{n-1} + c_n Q_{n-2}$.
   (c) Etablir que $nQ_n = \alpha_n X Q_{n-1} + \beta_n Q_{n-2}$ où $(\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer.
5. (a) Etablir que P_n est solution d'une équation différentielle du second ordre de la forme :
   $\forall t \in \mathbb{R},\ \left(t^2-1\right) P_n''(t) + \mu_n t P_n'(t) + \nu_n P_n(t) = 0$ où $(\mu_n, \nu_n) \in \mathbb{R}^2$ à déterminer.
   (b) Calculer $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)dt$