Devoir en temps libre n° 00

Ce devoir est constitué de deux petits problèmes. L'ordre des exercices ne correspond à aucun critère de difficulté ou de longueur : vous pouvez les traiter dans l'ordre que vous voulez. Veillez à soigner la copie tant pour l'écriture, la propreté que pour la rédaction, la rigueur et l'argumentation. Vous numéroterez vos copies et ferez apparaître clairement sur la première page le nombre de copies.

PROBLEME I

Dans tout ce problème, a désigne un réel.
On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

où P est un polynôme.
Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites réelles est noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Un élément de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est noté indifféremment $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou u.
La partie I étudie le cas où P est constant.
La partie II étudie le cas où $a \neq 1$.
La partie III étudie le cas où $a = 1$.

Partie I

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)} = \Big\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \exists b \in \mathbb{R};\quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = au_n + b\Big\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(0)}$. Il existe donc b réel tel que pour tout n de $\mathbb{N}$: $\quad u_{n+1} = au_n + b$. Montrer l'unicité de b. On notera $b = b_u$ pour $u \in E_a^{(0)}$.
2. (a) Déterminer $E_1^{(0)}$.

   (b) Déterminer $E_0^{(0)}$. *Dans le reste de cette partie, a est supposé différent de* 1.
3. Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
4. Soit x la suite constante égale à 1 (pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n = 1$) et soit y la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $\quad y_n = a^n$.
   Montrer que (x, y) est une famille libre de $E_a^{(0)}$. On précisera les valeurs de b_x et b_y.
5. Soit $u \in E_a^{(0)}$.

   (a) Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ unique tel que $\begin{cases} \lambda x_0 + \mu y_0 & = u_0 \\ \lambda x_1 + \mu y_1 & = u_1 \end{cases}$

   (b) Montrer que, pour λ et μ définis à la question précédente, pour tout n de $\mathbb{N}$,
   $$u_n = \lambda x_n + \mu y_n$$

   (c) Que peut-on en conclure ?
6. Déterminer $E_a^{(0)}$. On donnera en particulier la dimension de $E_a^{(0)}$.

Partie II

Dans cette partie, on suppose que $a \neq 1$.
On fixe un entier naturel p. On note $\mathbb{R}_p[X]$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à p.
On pourra confondre polynôme et fonction polynomiale.
On pose $E_a^{(p)} = \Big\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X];\quad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = au_n + P(n)\Big\}$.

1. Soit $u \in E_a^{(p)}$. Il existe donc $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = au_n + P(n)$$

   Montrer l'unicité de P (on pourra étudier l'application φ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ définie par : $\varphi(P) = \big(P(0), P(1), \dots, P(p)\big)$).
   On notera $P = P_u$ pour $u \in E_a^{(p)}$.
2. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
3. Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u) = P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.
4. Déterminer $\operatorname{Ker}\theta$ (noyau de θ).
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $Q_k = (X+1)^k - aX^k$.
   (a) Quel est le degré de Q_k ?
   (b) Montrer que la famille $(Q_0, Q_1, \dots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.
6. (a) Montrer que pour tout k dans $\{0, 1, \dots, p\}$, Q_k est dans l'image de θ, notée $\operatorname{Im}\theta$.
   (b) Que peut-on en conclure ?
7. Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.
8. Pour $k \in \{0, 1, \dots, p\}$, on pose $x^{(k)}$ la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $x_n^{(k)} = n^k$.
   On rappelle que y est la suite définie, pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $y_n = a^n$.
   Montrer que $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ est une base de $E_a^{(p)}$.
9. *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

Partie III

Dans cette partie, on suppose que $a = 1$.

1. En adaptant les résultats obtenus à la partie précédente, déterminer :

$$E_1^{(p)} = \Big\{ u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \quad \exists P \in \mathbb{R}_p[X]; \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + P(n) \Big\}$$

2. *Application :* déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = u_n - 6n + 1 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

PROBLEME II

Dans ce problème φ désigne une fonction continue strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf éventuellement en un nombre fini de points.
On suppose par ailleurs que φ possède une limite ℓ (finie ou infinie) en $+\infty$. Le but de ce problème est d'étudier la fonction f où $f(x)$ est défini, pour x réel, comme étant l'unique solution de l'équation (E_x) d'inconnue y :

$$(E_x) \qquad \int_x^y \varphi(t)\,dt = 1$$

La partie I est consacrée à un exemple où l'on détermine explicitement f.
La partie II permet d'aboutir à l'existence de f si $\ell \neq 0$.
La partie III étudie des propriétés de la fonction f.
La partie IV illustre les parties II et III sans calcul explicite de f.

Partie I

Dans cette partie, la fonction φ est la fonction exponentielle exp.

1. Prouver que pour tout x réel l'équation (E_x) possède une unique solution notée $f(x)$.
   On montrera que $f(x) = \ln(1 + e^x)$.
2. Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}$. Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle d'étude.
3. Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ représentant f. Préciser la position de celle-ci par rapport à l'asymptote.
4. Déterminer un développement limité à l'ordre 2 pour la fonction f au voisinage de 0.
   En déduire l'équation de la tangente en 0 à $\mathcal{C}$ et la position locale de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à celle-ci.
5. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé, en utilisant les résultats des questions précédentes.

Partie II

Pour x réel, on pose $\Phi_x(u) = \displaystyle\int_x^u \varphi(t)\,dt$.
On rappelle que Φ_x est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour u réel, $\Phi'_x(u) = \varphi(u)$.

1. Dans cette question seulement, φ est définie, pour tout t réel, par : $\varphi(t) = \dfrac{1}{\pi(1+t^2)}$.
   (a) Montrer que pour x et y réels, $\displaystyle\int_x^y \varphi(t)\,dt < 1$.
   (b) En déduire que pour tout x réel, l'équation (E_x) n'a pas de solution.
   (c) Que vaut ℓ ? *Dans tout le reste de ce problème, on suppose que* $\ell \neq 0$.
2. Exprimer l'équation (E_x) à l'aide de la fonction Φ_x.
3. (a) Montrer que Φ_x est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Que peut-on en conclure ?
   (b) Montrer qu'il existe t_0 réel et $A > 0$ tels que pour tout $t \geqslant t_0$, $\varphi(t) \geqslant A$.
   On pourra distinguer les cas $\ell = +\infty$ et ℓ réel.
   (c) En déduire que pour tout x réel, il existe $u \geqslant x$ tel que $\Phi_x(u) > 1$.
   (d) En remarquant que $\Phi_x(x) = 0$, montrer que l'équation (E_x) possède une solution unique. *Jusqu'à la fin de ce problème, $f(x)$ désigne pour x réel, l'unique solution de l'équation (E_x).*

Partie III

1. Montrer, en justifiant l'écriture, que pour tout x réel, $f(x) = \Phi_0^{-1}\big(\Phi_0(x) + 1\big)$
   (on pourra admettre les résultats de la question **II) 3)**).
2. En déduire que f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. (a) On suppose dans cette question **a)**, que φ ne s'annule pas. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour x réel, montrer que : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{\varphi\big(f(x)\big)}$.

   (b) On suppose dans cette question **b)**, qu'il existe x_0 réel tel que $\varphi(x_0) \neq 0$ et tel que φ reste strictement positive sur un voisinage de $f(x_0)$ sauf en $f(x_0)$ où φ s'annule.
   Montrer que f n'est pas dérivable en x_0 mais que la courbe représentant f possède au point d'abscisse x_0 une tangente verticale.

4. On se propose d'étudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell = +\infty$.
   Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$.

   (a) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que pour $t \geqslant a$, $\varphi(t) \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$.

   (b) En déduire que si $x \geqslant a$, $|f(x) - x| \leqslant \varepsilon$. Que peut-on en conclure ?

5. Etudier de même la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$ dans le cas où $\ell \in \mathbb{R}_+^*$.

6. Dans cette question, on suppose φ paire. On note Γ le graphe de f.

   (a) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que $(x, y) \in \Gamma$ si et seulement si $(-y, -x) \in \Gamma$.

   (b) En déduire que la courbe représentant f possède un axe de symétrie à déterminer.

Partie IV

Dans cette partie, φ est la fonction définie, pour tout x réel, par $\varphi(x) = x^4 - 2x^2 + 1$.

1. Justifier que φ vérifie les hypothèses du problème.

2. Sans calculer $f(x)$ et en utilisant les résultats des parties précédentes, esquisser le graphe de la fonction f, en précisant les éléments remarquables (asymptotes, axe de symétrie, points à tangentes horizontales ou verticales).