CHAPITRE 0
SUITES ET SERIES DE COMPLEXES

Table des matières

1 Les différents ensembles de nombres

1.1 Vocabulaire des structures algébriques

E est un ensemble non vide, $\top$ et $\diamond$ deux lois de composition internes (en abrégé l.c.i.), c'est à dire deux applications de $E \times E$ vers E.

1.1.1 Rappels

- **Définition** : $\top$ est **commutative** lorsque : $\forall (x,y) \in E^2$, $x \top y = y \top x$
- **Définition** : $\top$ est **associative** lorsque : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $x \top (y \top z) = (x \top y) \top z$
- **Définition** : n est **élément neutre dans E pour la loi $\top$** lorsque : $\forall x \in E$, $x \top n = n \top x = x$
- **Définition** : n étant neutre pour $\top$ dans E, a, élément de E, est **le symétrique de l'élément** b de E lorsque : $a \top b = b \top a = n$
- **Définition** : $\diamond$ est **distributive par rapport à $\top$** lorsque : $\forall (x,y,z) \in E^3$, $x \diamond (y \top z) = (x \diamond y) \top (x \diamond z)$ et $(y \top z) \diamond x = (y \diamond x) \top (z \diamond x)$
- **Définition** : $(E, \top)$ est un **groupe** lorsque : $\top$ est une l.c.i. associative, possédant un neutre n et pour laquelle tout élément admet un symétrique (on dit aussi : "est symétrisable" ou "est inversible"). Ce groupe est dit **commutatif ou abélien** lorsque $\top$ est de plus commutative.
- **Définition** : $(E, \top, \diamond)$ est un **anneau** lorsque : $(E, \top)$ est un groupe abélien, $\diamond$ est une l.c.i. distributive par rapport à $\top$ et possède un neutre m différent de n. Cet anneau est dit **commutatif** lorsque $\diamond$ est commutative.
- **Définition** : L'anneau $(E, \top, \diamond)$ est dit **intègre** lorsqu'il est commutatif et sans diviseur de zéro, c'est à dire lorsque : $\forall (a,b) \in E^2,\ a \diamond b = n \Rightarrow a = n$ ou $b = n$
- **Définition** : $(E, \top, \diamond)$ est **un corps** lorsque c'est un anneau commutatif dans lequel tout élément différent de n a un symétrique pour la loi $\diamond$.

1.1.2 Complément : structure d'algèbre

E est de plus muni d'une loi externe, notée ".", sur le corps $\mathbb{K}$ des scalaires (sous-corps de $\mathbb{C}$), c'est à dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ vers E.

- **Définition** : $(E, \top, \diamond, .)$ est une **$\mathbb{K}$-algèbre** lorsque :
  * $(E, \top, \diamond)$ est un anneau.
  * $(E, \top, .)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel
  * $\forall (\alpha, x, y) \in \mathbb{K} \times E \times E$: $(\alpha.x) \diamond y = \alpha.(x \diamond y) = x \diamond (\alpha.y)$
- Exemples :
  * $(\mathbb{K}[X], +, \times, .)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre commutative et intègre.
  * $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre commutative et non intègre.
  * Si E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $(\mathcal{L}(E), +, \circ, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, non commutative et contenant des diviseurs de zéro, sauf si E est réduit au seul vecteur nul.
  * $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), +, \times, .)$ est une $\mathbb{R}$-algèbre, non commutative et contenant des diviseurs de zéro si $n \geqslant 2$.

1.2 Vocabulaire des ensembles ordonnés

E est un ensemble non vide et $\leqslant$ une relation définie sur E.

- **Définition** : $\leqslant$ est une **relation d'ordre** lorsqu'elle est :
  - **réflexive** : $\forall x \in E,\ x \leqslant x$
  - **antisymétrique** : $\forall (x, y) \in E^2,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant x) \Rightarrow x = y$
  - **transitive** : $\forall (x, y, z) \in E^3,\ (x \leqslant y \text{ et } y \leqslant z) \Rightarrow x \leqslant z$
- Cet **ordre est dit total** lorsque deux éléments quelconques de E sont comparables par $\leqslant$: $\forall (x, y) \in E^2,\quad x \leqslant y \quad \text{ou} \quad y \leqslant x$

Dans la suite, $(E, \leqslant)$ est un ensemble ordonné, A une partie de E, m et s des éléments de E :

- **Définition** : m **majore** A (ou **est un majorant de** A) signifie : $\forall x \in E,\ x \in A \Rightarrow x \leqslant m$. Définition analogue pour **minorant**.
- **Définition** : m est **le maximum** (ou **le plus grand élément**) de A signifie : m est dans A et m majore A. Si un tel élément existe, il est unique. Définition analogue pour **minimum**.
- **Définition** : A admet une **borne supérieure** s lorsque l'ensemble des majorants de A a un minimum s. Si A a un maximum, celui-ci est borne supérieure de A. Définition analogue pour **borne inférieure**.

1.3 Les ensembles de nombres usuels

- $\mathbb{N}$ ensemble des entiers naturels, il est muni de l'addition (commutative, associative et 0 est neutre) et de la multiplication (commutative, associative, distributive par rapport $+$, 1 est neutre).
  Propriété : Dans $\mathbb{N}$ toute partie non vide a un minimum, elle a un maximum si et seulement si elle est majorée.
- $\mathbb{Z}$, ensemble des entiers relatifs qui, muni de $+$ et $\times$ constitue un anneau commutatif intègre.
  Propriété : Dans $\mathbb{Z}$ une partie non vide a un maximum si et seulement si elle est majorée.
- **Propriété** : $\mathbb{Q}$, ensemble des nombres rationnels qui, muni de $+$ et $\times$ vérifie les propriétés suivantes :
  - $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps.
  - Ce corps est totalement ordonné : il est muni de la relation $\leqslant$, relation d'ordre total compatible avec les lois $+$ et $\times$:
    $\forall (a, b, c) \in \mathbb{Q}^3,\ a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c$ et, si $c \geqslant 0$, $a \leqslant b \Rightarrow a \times c \leqslant b \times c$.
  - Ce corps est **archimédien** : $\forall (x, y) \in \mathbb{Q}_+^* \times \mathbb{Q},\ \exists n \in \mathbb{N},\ nx > y$
  - Mais dans $\mathbb{Q}$ il existe des parties non vides et majorées n'ayant pas de maximum, ni même de borne supérieure.
- **Propriété** : $\mathbb{R}$ ensemble des nombres réels : $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps totalement ordonné et archimédien vérifiant de plus :
  - Dans $\mathbb{R}$ toute partie non vide et majorée admet une borne supérieure.
  - Critère de borne supérieure dans $\mathbb{R}$:
    Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et s un réel, s est la borne supérieure de A si et seulement si :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x \in A \Rightarrow x \leqslant s & (s \text{ est un majorant de } A) \\ \forall \varepsilon > 0,\ s - \varepsilon \text{ ne majore pas } A & (\text{et c'est le plus petit }) \end{cases}$$

    c'est à dire :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R},\ x \in A \Rightarrow x \leqslant s \\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists a_\varepsilon \in A,\ s - \varepsilon < a_\varepsilon \end{cases}$$

- **Propriété** : $\mathbb{C}$ ensemble des nombres complexes : $(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps vérifiant de plus les propriétés équivalentes suivantes :
  - ∗ Tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ non constant est scindé dans $\mathbb{C}[X]$ (d'Alembert-Gauss).
  - ∗ Les polynômes irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes du premier degré.
  - ∗ Tout polynôme complexe de degré $n \geqslant 1$ a exactement n racines comptées avec leur multiplicité.
  - ∗ Mais aucune relation d'ordre définie sur $\mathbb{C}$ ne peut à la fois prolonger la relation $\leqslant$ connue sur $\mathbb{R}$ et être compatible avec $+$ et $\times$

2 Rappels concernant les suites de réels ou de complexes

$\mathbb{K}$ désigne indifféremment le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

2.1 Suites bornées, suites convergentes

- **Définition** : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, est **bornée** lorsque :
$$\exists M \in \mathbb{R}_+,\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ |u_n| \leqslant M$$
ou, ce qui est équivalent :
$$\exists M' \in \mathbb{R}_+,\ \ \exists p \in \mathbb{N},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant p \Rightarrow |u_n| \leqslant M'$$

- **Définition** : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite à valeurs dans $\mathbb{K}$, est **convergente** lorsque :
$$\exists L \in \mathbb{K},\ \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_0 \Rightarrow |\, u_n - L \,| \leqslant \varepsilon$$

- **Propriété** : Si un tel L existe, il est unique, noté $L = \lim(u_n)$.
- **Propriété** : Si une suite converge, elle est bornée.
- **Propriété** : L'ensemble $\text{Conv}(\mathbb{K})$ des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ qui sont convergentes et l'application $\lim : \begin{pmatrix} \text{Conv}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (u_n) & \longmapsto & \lim(u_n) \end{pmatrix}$ vérifient les propriétés suivantes :
$\forall \left((u_n)_{n\in\mathbb{N}}, (v_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) \in \text{Conv}(\mathbb{K})^2$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$
  - $*$ $(u_n + \alpha v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \text{Conv}(\mathbb{K})$ et $\lim(u_n + \alpha v_n) = \lim(u_n) + \alpha \lim(v_n)$.
  - $*$ $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \text{Conv}(\mathbb{K})$ et $\lim(u_n \times v_n) = \lim(u_n) \times \lim(v_n)$.
  - $*$ $(1_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite constante dont les termes valent 1 est convergente et $\lim(1_n) = 1$.
- **Propriété** : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, alors $(u_n v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- **Propriété** : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers L alors $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $|L|$
- **Propriété** : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 si et seulement si $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2.2 Suites extraites

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes.

- **Définition** : $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est une **suite extraite (ou sous-suite)** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si il existe une application φ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante telle que : $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = u_{\varphi(n)}$.
- Exemple : si $p \in \mathbb{N}$, la suite tronquée $(u_{n+p})_{n\in\mathbb{N}}$, notée aussi $(u_k)_{k\geqslant p}$ est extraite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **Propriété** : Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- **Propriété** : Si φ est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante, alors : $\forall n \in \mathbb{N},\ \varphi(n) \geqslant n$
- **Propriété** : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente, toutes ses sous-suites sont convergentes vers $\lim(u_n)$.
- **Propriété** : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite convergente si et seulement si les sous-suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et ont la même limite.

  Dem.

- **Théorème** : Théorème de Bolzano-Weierstrass : "Toute suite bornée de nombres réels ou de nombres complexes admet au moins une sous-suite convergente".

  Dem.

2.3 Propriétés spécifiques aux suites de réels

Dans la suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent des suites de réels.

- **Définition** : Suites bornées
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **majorée** lorsque : $\exists b \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant b$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **minorée** lorsque : $\exists a \in \mathbb{R},\ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \geqslant a$.
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **bornée** (c'est à dire $(|u_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée) si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.
- **Définition** : Suites monotones
  - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **croissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_n \leqslant u_{n+1}$,

* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **décroissante** lorsque : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ u_{n+1} \leqslant u_n$
* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone** lorsqu'elle est croissante ou décroissante.
* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **monotone au delà d'un certain rang** $p \in \mathbb{N}$ si $(u_n)_{n\geqslant p}$ est monotone.
* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est stationnaire lorsqu'elle est constante à partir d'un certain rang.

- **Définition** : Divergence vers l'infini :
  * $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers** $+\infty$ ssi : $\forall A \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geqslant N_0 \Rightarrow u_n \geqslant A$
  * $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge vers** $-\infty$ ssi : $\forall B \in \mathbb{R}, \exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geqslant N_0 \Rightarrow u_n \leqslant B$
- **Théorème** : Théorèmes de convergence monotone :
  * Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ croît à partir d'un certain rang p, elle converge ssi elle est majorée (et sa limite est alors $\mathrm{Sup}\{u_n,\ n \geqslant p\}$; elle diverge vers $+\infty$ ssi elle n'est pas majorée.
  * Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît à partir d'un certain rang p, elle converge ssi elle est minorée (et sa limite est alors $\mathrm{Inf}\{u_n,\ n \geqslant p\}$; elle diverge vers $+\infty$ ssi elle n'est pas minorée.
- **Théorème** : Théorème de convergence par encadrement (théorème dit "des gendarmes") :
  * Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers une même limite L et si au delà d'un certain rang on a : $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et sa limite est L.
  * Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ et si au delà d'un certain rang on a : $u_n \leqslant v_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$.
  * Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$ et si au delà d'un certain rang on a : $v_n \leqslant w_n$, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $-\infty$.
- **Définition** : **Suites adjacentes** : Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes lorsque l'une croî t, l'autre décroî t et la différence converge vers 0.
  Théorème : Deux suites adjacentes convergent et ont la même limite.
- Prolongement des inégalités : **Propriété** : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes et si au delà d'un certain rang on a : $u_n \leqslant v_n$ alors $\lim(u_n) \leqslant \lim(v_n)$.
- Lien avec les bornes supérieure et inférieure : **Propriété** :
  Si A est une partie non vide de $\mathbb{R}$
  * Si A est majorée, il existe une suite de points de A qui converge vers la borne supérieure de A.
  * Si A est minorée, il existe une suite de points de A qui converge vers la borne inférieure de A.
- Lien avec la densité :
  Si A est une partie de $\mathbb{R}$
  * **Définition :** A est **dense** dans $\mathbb{R}$ lorsque tout intervalle ouvert non vide de $\mathbb{R}$ intercepte A.
    Exemples : $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$
  * **Caractérisation :** A est dense dans $\mathbb{R}$ si et seulement si tout nombre réel est limite d'une suite de points de A.

2.4 Comparaison des suites réelles ou complexes

Dans la suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Relation de domination
  * **Définition :** Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne présente aucun terme nul au delà d'un certain rang p, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **dominée par** $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (noté $u_n = O(v_n)$) signifie : $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant p}$ est bornée.
  * On étend cette définition lorsque l'on ne sait rien de la nullité des termes v_n au delà d'un certain rang par :
    $u_n = O(v_n)$ si et seulement si $\exists \mu \in \mathbb{R}_+^*, \exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geqslant N_0 \Rightarrow \mid u_n \mid \leqslant \mu \mid v_n \mid$.

* La relation O est transitive et $u_n = O(v_n) \Leftrightarrow |u_n| = O(|v_n|)$

- **Définition :** Relation de **prépondérance**
  * Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne présente aucun terme nul au delà d'un certain rang p, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **négligeable** devant $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (noté $u_n \ll v_n$ ou $u_n = o(v_n)$) signifie : $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant p}$ converge vers 0.
  * On étend cette définition lorsque l'on ne sait rien de la nullité des termes v_n au delà d'un certain rang par :
    $u_n = o(v_n)$ si et seulement si $\exists(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite convergente vers 0, $\exists N_0 \in \mathbb{N}/n \geqslant N_0 \Rightarrow u_n = \varepsilon_n.v_n$
  * La relation o est transitive et $u_n = o(v_n) \Leftrightarrow |u_n| = o(|v_n|)$
- Relations entre O et o
  * $u_n = o(v_n) \Rightarrow u_n = O(v_n)$
  * $u_n = o(v_n)$ et $v_n = O(w_n) \Rightarrow u_n = o(w_n)$
  * $u_n = O(v_n)$ et $v_n = o(w_n) \Rightarrow u_n = o(w_n)$
- **Définition :** Relation d'**équivalence**
  * Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne présente aucun terme nul au delà d'un certain rang p, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **équivalente** à $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (noté $u_n \sim v_n$) signifie : $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)_{n\geqslant p}$ converge vers 1.
  * On étend cette définition lorsque l'on ne sait rien de la nullité des termes v_n au delà d'un certain rang par :
    $u_n \sim v_n$ ssi $\exists(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite convergente vers 1, $\exists N_0 \in \mathbb{N} \,/\, n \geqslant N_0 \Rightarrow u_n = \alpha_n.v_n$
  * $u_n \sim v_n \Leftrightarrow (u_n - v_n) = o(v_n) \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n)$ (cf les développements limités)
  * La relation $\sim$ est une relation d'équivalence.
  * $u_n \sim v_n \Rightarrow |u_n| \sim |v_n|$
- Comparaison avec les suites constantes <u>non nulles</u> : L est un scalaire <u>non nul</u>. On note L la suite constante dont tous les termes valent L.
  * $u_n = O(L) \Leftrightarrow (u_n)$ est bornée $\Leftrightarrow u_n = O(1)$
  * $u_n = o(L) \Leftrightarrow (u_n)$ converge vers 0 $\quad \Leftrightarrow u_n = o(1)$
  * $u_n \sim L \Leftrightarrow (u_n)$ converge vers L
- **Propriété** : Propriétés conservées par équivalence. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles ou complexes :
  * Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\text{Lim}(u_n) = \text{Lim}(v_n)$.
  * Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (ou $-\infty$), alors $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$ (ou $-\infty$).
  * Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites réelles et s'il existe un rang p au delà duquel on a $u_n > 0$, alors il existe un rang q au delà duquel on a $v_n > 0$
- Compatibilités de la relation $\sim$
  * La relation $\sim$ est compatible avec le produit : $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n \Rightarrow u_n a_n \sim v_n b_n$.
  * La relation $\sim$ est compatible avec le passage à l'inverse : si pour tout n, $a_n \neq 0$ et $b_n \neq 0$, $a_n \sim b_n \Rightarrow \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{b_n}$.
  * La relation $\sim$ est donc compatible avec le quotient : si pour tout n, $a_n \neq 0$ et $b_n \neq 0$, $u_n \sim v_n$ et $a_n \sim b_n \Rightarrow \dfrac{u_n}{a_n} \sim \dfrac{v_n}{b_n}$.
  * La relation $\sim$ est compatible avec les puissances des suites à valeurs réelles strictement positives :
    Si $\mu \in \mathbb{R}$, si $\forall n\ u_n > 0$ et $v_n > 0$, $u_n \sim v_n \Rightarrow u_n^{\mu} \sim v_n^{\mu}$.

* La relation $\sim$ n'est pas compatible avec la somme (ne pas ajouter des équivalents !)
* Attention aux exponentielles : $(e^{u_n} \sim e^{v_n}) \Leftrightarrow (u_n - v_n \to 0)$, ce qui n'a aucun lien logique avec $u_n \sim v_n$.

- **Propriété** : Comparaisons de base :
  * Suites divergentes vers $+\infty$: si $(\alpha, \beta, \gamma) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$: $\ln(n)^\alpha \ll n^\beta \ll e^{\gamma n} \ll n! \ll n^n$
  * Suites convergentes vers 0 : si $(\alpha, \beta, \gamma) \in {\mathbb{R}_+^*}^3$: $\dfrac{1}{n^n} \ll \dfrac{1}{n!} \ll e^{-\gamma n} \ll n^{-\beta} \ll \ln(n)^{-\alpha}$
  * Equivalent de Stirling : $n! \sim \dfrac{n^n}{e^n}\sqrt{2n\pi}$

2.5 Suites particulières

- Suites récurrentes associées à une fonction

  Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans I (on dit alors que **l'intervalle I est stable par f**). Une suite (u_n) est récurrente associée à f lorsqu' elle est définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

  * Si (u_n) converge vers $L \in I$, et si f est continue au point L, alors $f(L) = L$. Il sera donc intéressant de déterminer les annulations de la fonction $g : x \to f(x) - x$. Le signe de cette fonction permettra d'avoir des informations sur les variations de (u_n)...
  * (u_n) est arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$ lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$ (la fonction f est ici $x \to x + r$). On a alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $u_n = u_0 + nr$; $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (n+1)\left(\dfrac{u_0 + u_n}{2}\right)$. En particulier : $1 + 2 + .. + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.
  * (u_n) est géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$ lorsque $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n$ (la fonction f est ici $x \to qx$). On a alors $u_n = u_0 \times q^n$, et si $q \neq 1$, $u_0 + u_1 + .. + u_n = u_0\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.
  * (u_n) est arithmético-géométrique lorsqu'il existe $r \neq 0$ et $q \neq 1$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = qu_n + r$. f est ici la fonction $x \to qx + r$, elle admet un unique point fixe L et la suite $v_n = u_n - L$ est géométrique de raison q.

- Suites linéairement récurrentes à deux termes

  Il s'agit des suites de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ données par leurs deux premiers termes $(u_0, u_1) \in \mathbb{K}^2$ et la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ où a et b sont deux constantes dans $\mathbb{K}$. L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ est l'équation $(E) : x^2 = ax + b$.

  Propriété :

  * Si (E) a deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{K}$, alors :
    $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \,/\, \forall n \in \mathbb{N} : u_n = \alpha(r_1)^n + \beta(r_2)^n$
  * Si (E) a une racine double r, alors :
    $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2 \,/\, \forall n \in \mathbb{N} : u_n = \alpha r^n + \beta(nr^n)$.
  * Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si (E) a deux racines distinctes r_1 et r_2 dans $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, elles sont conjuguées : $r_1 = \rho e^{i\varphi}$ et $r_2 = \rho e^{-i\varphi}$, et on a alors :
    $\exists(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \,/\, \forall n \in \mathbb{N} : u_n = \rho^n(\alpha\cos(n\varphi) + \beta\sin(n\varphi))$

3 Séries de réels ou de complexes : rappels.

$\mathbb{K}$ désigne indifféremment le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

3.1 Définitions et propriétés

3.1.1 Terme général, somme partielle, convergence

- **Définition :** Etant donnée une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réel ou complexes, **la série de terme général** u_n, notée $\sum u_n$, est la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où, pour tout entier n, $S_n = u_0+u_1+\ldots+u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ (**somme partielle** de rang n).
- La série $\sum u_n$ est dite **convergente** lorsque la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est convergente. Le scalaire S, limite de $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est noté $S = \sum_{p=0}^{\infty} u_p$ et nommé **somme** de la série.
- Si $\sum u_n$ est convergente on définit la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des restes partiels par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $R_n = S - S_n = \sum_{k=0}^{\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$. (R_n) est convergente et a pour limite 0.
- Pour qu'une série $\sum u_n$ converge, il est nécessaire <u>mais non suffisant</u> que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. Lorsque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ est **grossièment divergen**te

3.1.2 Exemples

- <u>Séries géométriques</u> :
  * Soit $z \in \mathbb{C}$, la série géométrique de raison z est la série de terme général $u_n = z^n$ (avec la convention $u_0 = 1$ même si $z = 0$).
  * Si $z = 1$, $\sum_{k=0}^{n} z^k = n+1$, et si $z \neq 1$, $\sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$.
  * $\sum z^n$ est convergente si et seulement si $\mid z \mid< 1$, sa somme vaut alors $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \dfrac{1}{1-z}$, et le reste partiel de rang n est $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} z^k = \dfrac{z^{n+1}}{1-z}$
  * Plus généralement si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $v_0 \neq 0$ et de raison z, $\sum v_n$ converge si et seulement si $|z| < 1$, et dans ce cas, $\sum_{k=0}^{\infty} v_k = \dfrac{v_0}{1-z}$
- <u>Séries télescopiques</u> :
  * **Définition :** La série $\sum u_n$ est dite **télescopique** lorsque : $\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ / $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = x_{n+1} - x_n$.
  * La série télescopique $\sum(x_{n+1} - x_n)$ converge si et seulement si la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On a dans ces conditions, $\sum_{n=0}^{\infty}(x_{n+1} - x_n) = (\lim\limits_{n\to\infty} x_n) - x_0$.

3.1.3 Linéarité

- **Propriété :** $\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \forall \alpha \in \mathbb{K}$, si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, alors $\sum(u_n + \alpha v_n)$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + \alpha v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \alpha \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$
- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge.
- Attention avant d'écrire $\sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ s'assurer que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont bien toutes les deux convergentes (ce qui entraîne la convergence de $\sum(u_n + v_n)$). En effet il se peut que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent tandis que $\sum(u_n + v_n)$ converge.

3.2 Séries de nombres réels positifs

3.2.1 Critère de convergence

- **Critère** : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs, la série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si la suite (S_n) de ses sommes partielles est majorée. Dans ces conditions, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} S_n$.
- Le résultat concernant la convergence est valable si les termes u_n ne sont positifs qu'au delà d'un certain rang n_o.
- L'étude de $\sum(-u_n)$ permettra de se ramener dans ce contexte lorsque les termes u_n sont négatifs au delà d'un certain rang.

3.2.2 Utilisation des relations de comparaison

Dans tout ce paragraphe, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels positifs

- Comparaison directe (par $\leqslant$) : **Propriété :** Si au delà d'un rang n_0, on a $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$:
  * La convergence de la série $\sum v_n$ implique celle de la série $\sum u_n$. De plus, lorsque les deux séries convergent, on a $\sum_{n=n_0}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} v_n$.
  * la divergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$.
- Comparaison asymptotique par équivalence (par $\sim$). **Propriété :**
  * Si $u_n \sim v_n$, alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature (i.e. toutes deux convergentes ou toutes deux divergentes).
  * Ce résultat demeure valable si les termes u_n et v_n ne sont positifs qu'au delà d'un certain rang, et donc aussi lorsque u_n et v_n sont négatifs au delà d'un certain rang.
  * L'équivalence $u_n \sim v_n$ entraîne qu'au delà d'un certain rang, u_n et v_n ont le même signe. Il suffira donc, pour utiliser la comparaison $u_n \sim v_n$ que l'une des deux suites (u_n) ou (v_n) ait des termes gardant un signe constant au delà d'un certain rang.
- Comparaison avec une intégrale : **Propriété :** f est ici une fonction continue et monotone sur $\mathbb{R}_+$

* Si f est décroissante : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{n+1} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant f(0) + \int_0^{n} f(t)dt$
* Si f est croissante : $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle f(0) + \int_0^{n} f(t)dt \leqslant \sum_{k=0}^{n} f(k) \leqslant \int_0^{n+1} f(t)dt$
* Séries de Riemann : la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

3.3 Séries de nombres réels ou complexes

Dans tout ce paragraphe, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombre complexes (et donc éventuellement de nombres réels !).

3.3.1 Absolue convergence

- **Définition :** La série $\sum u_n$ est dite **absolument convergente** lorsque la série $\sum |u_n|$ (qui est à termes réels positifs) est une série convergente.
- **Propriété :** Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente et :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

3.3.2 Comparaisons asymptotiques

Propriété : $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs.

- Si $u_n = O(v_n)$ (ce qui équivaut à $|u_n| = O(v_n)$), la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence absolue de $\sum u_n$.
- Si $u_n = o(v_n)$ (ce qui équivaut à $|u_n| = o(v_n)$), la convergence de $\sum v_n$ implique la convergence absolue de $\sum u_n$.

4 Séries de réels ou de complexes : compléments.

$\mathbb{K}$ désigne indifféremment le corps $\mathbb{R}$ des réels ou le corps $\mathbb{C}$ des complexes.

Dans ce paragraphe, si $\sum u_n$ est une série, on notera $S_n(u) = \sum_{k=0}^{n} u_k$ ses sommes partielles, et, si elle converge, $R_n(u) = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ ses restes partiels.

4.1 Comparaisons asymptotiques de séries à termes positifs

4.1.1 Comparaisons par domination ou prépondérance

- **Propriété : <u>Règle de d'Alembert</u>**
  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ici supposée à termes strictement positifs.
  - Si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $L < 1$, alors la série $\sum u_n$ est convergente.
  - Si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel $L > 1$ ou diverge vers $+\infty$, alors la série $\sum u_n$ est grossièrement divergente.
  - Si la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1, on ne peut rien conclure (sauf si la convergence est vers 1^+).

- **Propriété : <u>Règle de Riemann</u>**
  - S'il existe $\alpha > 1$ / $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, alors $\sum u_n$ est convergente.
  - S'il existe $\alpha \leqslant 1$ / $(n^\alpha u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel non nul, ou diverge vers $+\infty$, alors $\sum u_n$ est divergente.

- **Propriété - Définition : <u>Exponentielle d'un complexe</u>**

  Soit $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \dfrac{z^n}{n!}$ est absolument convergente. Par définition, $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$.

- <u>Comparaison des sommes partielles et restes partiels</u>

  ⦿ *Cas de séries à termes positifs*

  Propriété : Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels positifs vérifiant $u_n = O(v_n)$ (respectivement $u_n = o(v_n)$)
  - Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et $R_n(u) = O(R_n(v))$ (respectivement $R_n(u) = o(R_n(v))$)
  - Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge et $S_n(u) = O(S_n(v))$ (respectivement $S_n(u) = o(S_n(v))$)

  Dem.

  ⦿ *Cas où une série est à termes complexes et l'autre à termes réels positifs*

  Propriété : Si $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de complexes et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels positifs vérifiant $w_n = O(v_n)$ (respectivement $w_n = o(v_n)$)

* Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum w_n$ converge absolument et $R_n(w) = O(R_n(v))$ (respectivement $R_n(w) = o(R_n(v))$)
* Si $\sum |w_n|$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge et $S_n(w) = O(S_n(v))$ (respectivement $S_n(w) = o(S_n(v))$)
* Mais attention ! on peut avoir ici convergence (non absolue) de $\sum w_n$ et divergence de $\sum v_n$.

4.1.2 Comparaison par $\sim$

- **Propriété :** Si $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geqslant 0$ et $v_n \geqslant 0$, et si $u_n \sim v_n$, on sait que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
  * Si $\sum v_n$ et $\sum u_n$ convergent, alors $R_n(u) \sim R_n(v)$
  * Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors $S_n(u) \sim S_n(v)$.

4.2 Comparaison avec une intégrale

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, continue par morceaux et positive. Pour $n > 0$, on pose

$$w_n = \int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n)$$

- **Propriété :** Si f est décroissante, la série $\sum w_n$ est convergente.

  Dem.

- Si f est décroissante, la série $\sum f(n)$ est convergente si et seulement si la suite $\left(\int_0^n f(t)dt\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

  Dem.

4.3 Séries alternées de nombres réels

4.3.1 Règle de Leibniz

- **Définition :** Une série $\sum u_n$ de réels est dite **alternée** lorsque le signe de $(-1)^n u_n$ est constant.
- **Propriété : Règle de Leibniz** :
  Si $\sum u_n$ est une "bonne série alternée", c'est à dire une série alternée où $(|u_n|)$ est une suite décroissante et convergente vers 0, alors $\sum u_n$ est convergente.

  Dem.

- Ce résultat demeure valable si l'alternance ou la décroissance n'a lieu qu'à partir d'un certain rang.
- Exemple : Séries de Riemann alternées :
  $\sum_{n>0} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
  Dem.

4.3.2 Utilisation de développements limités

- Pour des séries alternées qui ne sont pas absolument convergentes, on ne peut pas utiliser une comparaison par équivalents (car le signe des termes n'est pas constant), on peut en revanche effectuer un développement limité visant à faire apparaître un terme qui est de signe constant ou qui est le terme général d'une série absolument convergente.

4.3.3 Propriétés des sommes et restes de bonnes séries alternées

On suppose ici que (v_n) est une suite de réels qui décroît et converge vers 0. On s'intéresse à la série de terme général $u_n = (-1)^n v_n$. La règle de Leibniz assure la convergence de $\sum u_n$.

- Pour tout n, $R_n(u)$ a le signe de u_{n+1} et $|R_n(u)| \leqslant |u_{n+1}|$
  Dem.

- Pour tout n, $S_n(u)$ a le signe de u_0 (ici positif) et $|S_n(u)| \leqslant |u_0|$. Par prolongement d'inégalité on a : $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ a le signe de u_0 et $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant |u_0|$.
  Dem.

5 DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS EN 0

Développements à connaître

- $$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) \quad (\text{ ou } +O(x^{n+1})).$$
- $$\mathrm{ch}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{2k!} + o(x^{2n}) \quad (\text{ ou } +o(x^{2n+1}) \text{ ou } +O(x^{2n+2})).$$
- $$\mathrm{sh}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{ ou } +o(x^{2n+2}) \text{ ou } +O(x^{2n+3})).$$
- $$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{ ou } +o(x^{2n+2}) \text{ ou } +O(x^{2n+3})).$$
- $$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n}) \quad (\text{ ou } +o(x^{2n+1}) \text{ ou } +O(x^{2n+2})).$$
- $$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n) \ (\text{ou } +O(x^{n+1})).$$
- $$-\ln(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) \quad (\text{ou } +O(x^{n+2})).$$
- $$\ln(1+x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1} + o(x^{n+1}) \quad (\text{ou } +O(x^{n+2})).$$
- $$\arctan(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+1}) \quad (\text{ ou } +o(x^{2n+2}) \text{ ou } +O(x^{2n+3})).$$
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}$
$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)(\ldots)(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) \quad (\text{ou } +O(x^{n+1})).$$

Développements à savoir retrouver (ordre 4 ou 6... voire 8)

- $$\tan(x) = x + \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \qquad = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$
$$= x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$
- $$\mathrm{th}(x) = x - \frac{1}{3}x^3 + o(x^4) \qquad = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$
$$= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$
- $$\arcsin(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + o(x^4) \qquad = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + o(x^6)$$
$$= x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + o(x^8)$$