GÉNÉRALITÉS SUR LES ENSEMBLES ET LES APPLICATIONS

Exercice 1. Soient E et F deux ensembles et $f : E \mapsto F$ une application.

1. Montrer que, pour toutes parties A et B de E, on a :

   (a) $A \subset B \Longrightarrow f(A) \subset f(B)$ (b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ (c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

2. Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E, montrer que

   (a) $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$ (b) $f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i \in I} f(A_i)$

3. Montrer que, pour toutes parties A' et B' de F, on a :

   (a) $A' \subset B' \Longrightarrow f^{-1}(A') \subset f^{-1}(B')$ (c) $f^{-1}(A' \cap B') = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(B')$
   (b) $f^{-1}(A' \cup B') = f^{-1}(A') \cup f^{-1}(B')$

4. Plus généralement, si $(A'_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de F, montrer que

   (a) $f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A'_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A'_i)$ (b) $f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A'_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A'_i)$

Exercice 2. Soient E et F deux ensembles , f une application de E vers F et g une application de F vers E telle que $g \circ f = Id_E$.

1. Montrer que f est injective et g est surjective.
2. Justifier par un contre-exemple que f et g ne sont pas nécessairement bijectives

---

GROUPES

Exercice 3. On note G l'ensemble des nombres complexes de la forme $a + ib$ où a et b sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $(G, +)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}, +)$.
2. Montrer que $(G, +, \times)$ est un anneau commutatif. Est-il intègre ? Est-ce un corps ?
3. Vérifier que : $\forall z \in \mathbb{C},\ \ z \in G \Rightarrow |z|^2 \in \mathbb{N}$.
   En déduire que z est un élément inversible dans G si et seulement si : $z \in G$ et $|z| = 1$.
4. Montrer que l'ensemble $\widehat{A}$ des éléments inversibles d'un anneau commutatif $(A, +, \times)$ est, muni de la loi $\times$, un groupe. Quel est ce groupe lorsque A est un corps ? Déterminer le groupe $\widehat{G}$.

Exercice 4. Soit G un sous-groupe du groupe $(\mathbb{Z}, +)$, non réduit à $\{0\}$.

1. Montrer que $G \cap \mathbb{N}^* \neq \emptyset$, en déduire que $G \cap \mathbb{N}^*$ a un minimum m.
2. On pose $m\mathbb{Z} = \{km,\ \ k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que $G = m\mathbb{Z}$.

Exercice 5. Soit G un sous-groupe <u>FINI</u> du groupe $(\mathbb{C}^*, \times)$, non réduit au singleton $\{1\}$.

1. Soit $z \in G$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ z^n \in G$. En déduire que $|z| = 1$.
   G est donc un sous-groupe du groupe des complexes de module 1.
2. Soit A l'ensemble des arguments dans $[0, 2\pi[$ des éléments de G.
   (a) Montrer que $A \backslash \{0\}$ a un minimum θ.
   (b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ e^{in\theta} \in G$.
   (c) En déduire que θ est de la forme $\dfrac{2\pi}{p}$ où p est un entier naturel non nul.
3. Montrer que G est le groupe des racines p^{iemes} de l'unité.

RELATIONS D'ORDRE et BORNES SUPÉRIEURES

Exercice 6. A et B sont des parties de $\mathbb{R}$, non vides et majorées. On pose $A+B=\{a+b,\ \ a\in A,\ b\in B\}$

1. Justifier l'existence des bornes supérieures de A, B et $A+B$.
2. Montrer que $\sup(A+B)=\sup(A)+\sup(B)$

Exercice 7. On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des fonctions f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ qui sont bornées, c'est à dire pour lesquelles l'ensemble $\left\{\left|f(x)\right|,\ \ x\in\mathbb{R}\right\}$ est majoré.
Soient f et g deux fonctions bornées, et μ un réel non nul.

1. Justifier l'existence de $S(f)=\sup\left\{\left|f(x)\right|,\ \ x\in\mathbb{R}\right\}$ et montrer que $S(f)=0$ si et seulement si f est la fonction nulle.
2. Montrer que $S(f)+S(g)$ est un majorant de $\left\{\left|f(x)+g(x)\right|,\ \ x\in\mathbb{R}\right\}$.
   En déduire que $f+g\in\mathcal{B}$ et que $S(f+g)\leqslant S(f)+S(g)$.
3. Montrer que $\mu f\in\mathcal{B}$ et que $S(\mu f)\leqslant|\mu|S(f)$. Montrer alors que $S(\mu f)=|\mu|S(f)$

Exercice 8. A est une partie de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, on note S la borne supérieure de A.

1. Montrer que si $S\notin A$, on peut construire une suite strictement croissante $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de A qui converge vers S.
2. Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$, non vide et majorée, pour laquelle il n'existe pas de suite strictement croissante de points de A qui converge vers $S=\sup(A)$

Exercice 9. On définit dans $\mathbb{C}$ la relation $\preccurlyeq$ par :

$$\forall(a+ib,x+iy)\in\mathbb{C}^2,\ \ a+ib\preccurlyeq x+iy\Leftrightarrow[(a<x)\quad\text{ou}\quad(a=x\quad\text{et}\quad b\leqslant y)]$$

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre total dans $\mathbb{C}$, qui prolonge la relation $\leqslant$ de $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(\mathbb{C},+,\times,\preccurlyeq)$ n'est pas un corps ordonné.
3. Montrer qu'il n'existe aucune relation d'ordre total sur $\mathbb{C}$ qui prolonge la relation $\leqslant$ et pour laquelle $\mathbb{C}$ devienne un corps ordonné.

Exercice 10. Soit p un entier naturel qui n'est le carré d'aucun entier et $A_p=\left\{r\in\mathbb{Q}\ \middle|\ r^2\leqslant p\right\}$. L'objectif de l'exercice est de prouver que A_p est une partie non vide et majorée <u>de $\mathbb{Q}$</u> qui n'a pas de borne supérieure <u>dans $\mathbb{Q}$</u>.

1. Prouver que A_p est non vide et majorée par p.
2. On suppose que A_p a une borne supéreure $S\in\mathbb{Q}$.
   (a) En utilisant une suite d'éléments de A_p qui converge vers S, montrer que $S\in A_p$.
   (b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ \ S+\dfrac{1}{n}\notin A_p$, en déduire que $S^2\geqslant p$. On a donc $S^2=p$.
   (c) Montrer que la décomposition de p en facteurs premiers comporte au moins un nombre premier q qui est élevé à une puissance impaire. En déduire qu'il n'existe pas d'entiers N et D avec $pgcd(N,D)=1$ tels que $\dfrac{N^2}{D^2}=p$ et conclure.

THEME D'ETUDE

Exercice 11. soit G un sous groupe du groupe $(\mathbb{R},+)$, avec $G\neq\{0\}$.

1. Montrer que $G\bigcap\mathbb{R}_+^*$ admet une borne inférieure que l'on notera α. Montrer que : $\alpha\geqslant 0$.
2. On suppose que l'on a $\alpha>0$. Montrer qu'alors $G=\alpha\mathbb{Z}$. (Rappel : $\alpha\mathbb{Z}=\{\alpha k,\ k\in\mathbb{Z}\}$).
3. On suppose que l'on a $\alpha=0$. Montrer qu'alors G est dense dans $\mathbb{R}$ i.e. entre deux réels x et y distincts quelconques, il existe au moins un élément de G. (Indication : Considérer $\varepsilon\in G$ tel que $0<\varepsilon<\dfrac{|x-y|}{2}$ et montrer qu'il existe un multiple de ε entre x et y)
4. Exemple : soit $\omega\in\mathbb{R}$ et $G=\{a+b\omega,\ (a,b)\in\mathbb{Z}^2\}$.
   (a) Montrer que G est un sous groupe additif de $\mathbb{R}$.
   (b) Montrer que si ω est un rationnel avec $\omega=\dfrac{p}{q}$ où $pgcd(p,q)=1$, alors $G=\dfrac{1}{q}\mathbb{Z}$.
   (c) Que dire si ω n'est pas rationnel ?