MP 16-17 Feuille n° 02 : Suites de réels ou de complexes Du 02/09/16 au 09/09/16

RÉSULTATS GÉNÉRAUX

Exercice 1. Montrer qu'une suite d'entiers relatifs qui est convergente converge vers un entier, puis qu'elle est stationnaire (c'est à dire constante à partir d'un certain rang).

Exercice 2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $b_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$.

1. Montrer que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un complexe L, la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge également vers L (c'est le théorème de Césaro, hors programme).
2. Donner un exemple simple où la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge alors que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Exercice 3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite minorée de réels. Montrer que : soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, soit on peut extraire de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente (on pourra commencer par en extraire une sous-suite bornée).

Exercice 4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes. On suppose que les sous-suites $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent respectivement vers L_0, L_1, L_2 et M

1. En considérant la suite (u_{6n}), montrer que $L_0 = M$. Montrer de même que $L_1 = M$ et $L_2 = M$.
2. Montrer alors que la suite (u_n) est convergente.

RELATIONS DE COMPARAISON

Exercice 5. Déterminer un équivalent puis la limite de :

1. $a_n = \ln^2(n+1) - \ln^2(n)$
2. $b_n = \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$
3. $c_n = \left(3 \times 2^{1/n} - 2 \times 3^{1/n}\right)^n$
4. $d_n = \dfrac{n^{2a}}{a^n + \ln(n)}$ $(a \in \mathbb{R})$
5. $e_n = n \ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)$
6. $f_n = \dfrac{n^2 + \operatorname{th}(n)}{\operatorname{sh}(n) + \ln(n)}$

Exercice 6. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels strictement positifs avec $a_n \sim b_n$.

1. On suppose que ces deux suites convergent vers une limite $L \neq 1$ ou divergent vers $+\infty$, montrer que $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$.
2. Donner un exemple où les deux suites convergent vers 1 et où $\ln(a_n)$ et $\ln(b_n)$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 7. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de réels avec $a_n \sim b_n$.

1. Montrer que : $e^{a_n} \sim e^{b_n} \Leftrightarrow (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Donner un exemple de suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(ab_n)_{n\in\mathbb{N}}$ équivalentes, pour lesquelles e^{a_n} et e^{b_n} ne sont pas équivalentes.

SUITES RECURRENTES

Exercice 8. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \ln(1 + a_n)$

1. Donner, dans un même tableau, les variations de $x \longrightarrow \ln(1+x)$ et le signe de $x \longrightarrow \ln(1+x) - x$ et en déduire que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroît et converge vers 0.

2. Déterminer un réel s tel que $a_{n+1}^s - a_n^s$ ait une limite finie non nulle. En déduire, grâce au théorème de Césaro (cf 2), un équivalent simple de a_n.

Exercice 9. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{1}{1+a_n}$

1. Donner, dans un même tableau, les variations sur $\mathbb{R}_+$ de $f : x \longrightarrow \dfrac{1}{1+x}$ et celles de $g = f \circ f$, ainsi que les signes de $x \longrightarrow f(x) - x$ et $x \longrightarrow g(x) - x$.
2. En déduire que les suites $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(a_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes, puis que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

Exercice 10. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $a_0 \in \mathbb{R}$ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = a_n + e^{-a_n}$.

1. Etudier la monotonie et la convergence $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Etudier la suite $\left({}^{a_{n+1}} - e^{a_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire un équivalent de a_n.

AUTRES TYPES DE SUITES

Exercice 11.
1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de termes généraux $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n+1}$ et $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} - 2\sqrt{n}$ sont convergentes vers une même limite L.
2. Un réel $\varepsilon > 0$ étant donné, déterminer un rang n_ε au delà duquel on a $|u_n - L| < \varepsilon$.
3. Exemple : avec la calculatrice, donner une valeur approchée de L à 10^{-2} près.

Exercice 12. Etudier la limite éventuelle des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ données par : $a_0 > 0$, $b_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{a_n + b_n}$ et $b_{n+1} = \dfrac{b_n^2}{a_n + b_n}$. (On posera $d = b_0 - a_0$).

Exercice 13. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = -1 + X + X^2 + .. + X^n$. Montrer que P_n a une unique racine positive a_n. Etudier la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et sa limite.

SUITES USUELLES

Exercice 14. Etudier la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 2$.

Exercice 15. Etudier la convergence et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 3u_n - 1$.

Exercice 16. Déterminer la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\;u_{n+2} = u_{n+1} - u_n$

Exercice 17. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$, $u_1 = -\dfrac{5}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\;u_{n+2} + 2u_{n+1} - u_n = n$

1. Déterminer une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (an+b)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}$, $\;v_{n+2} + 2v_{n+1} - v_n = n$
2. Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n \in \mathbb{N}$, $\;w_{n+2} + 2w_{n+1} - w_n = 0$.
3. En déduire la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.