PROBABILITES SUR UN UNIVERS FINI

I) Expérience aléatoire et univers

Définition: On appelle **expérience aléatoire (ou épreuve)** , toute expérience qui conduit à des résultats possibles identifiés a priori et dont on ne peut prévoir le résultat. Les résultats d'une épreuve aléatoire sont appelés **issues** (ou **résultats possibles** ou **réalisations**)
L'ensemble des issues d'une expérience aléatoire est appelé **univers**

Remarque: Dans le cadre du programme de MPSI, on se limite aux univers finis.

Définition: Soit Ω un univers. On appelle **événement** une partie de Ω
Un événement élémentaire est un singleton.

Si A est un événement de Ω, on appelle **événement contraire** de A, l'événement $\complement_\Omega A = \overline{A}$

L'univers entier Ω est **l'événement certain** , $\varnothing$ est **l'événement impossible**

Si A et B sont deux événements, **l'événement "A et B"** est l'événement $A\cap B$,
l'événement "A ou B" est l'événement $A\cup B$

Deux événements **A et B sont** dits **incompatibles** si l'événement "A et B" est impossible.

Un système complet d'événements est une partition de Ω, i.e. c'est une famille $(A_1, \dots, A_n)$ d'événements (non impossibles) 2 à 2 incompatibles de Ω et dont la réunion est Ω.

Exemple: On considère l'univers Ω de 3 lancers successifs d'une piéce à Pile ou Face.
Ω = {PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF}.
Soit A l'événement : A = {PFP}, B l'évenement : " on tire 2 fois Face", C l'événement "on tire au moins deux fois Pile". Alors : B et C sont incompatibles, A est un événement élémentaire, (B, C, {FFF}) est un système complet d'événements.

II) Espaces probabilisés finis

Définition: Soit Ω un univers fini (non vide). On appelle **probabilité (ou loi de probabilité) sur Ω,** une application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans [0, 1] telle que : $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et, pour toutes parties disjointes A et B de Ω, $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Remarque : La seconde relation s'écrit aussi : pour tout couple d'événements incompatibles A et B, $\mathbb{P}$(A ou B) = $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$

Définition: Soit Ω un univers fini non vide. On appelle **probabilité uniforme sur Ω,** l'application $\mathbb{P}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans [0, 1] définie par : $\forall A\in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

Définition: **Un espace probabilisé** (fini) est un couple $(\Omega,\mathbb{P})$ où Ω est un univers (fini) et $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω.

Propriété: Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé (fini). Alors : (i) $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$

(ii) $\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$

(iii) $\forall (A,B)\in(\mathcal{P}(\Omega))^2$, $A\subset B \Rightarrow \mathbb{P}(A) \leqslant \mathbb{P}(B)$ (croissance)

(iv) $\forall (A,B)\in(\mathcal{P}(\Omega))^2$, $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$

Dem: (i). $\varnothing$ et $\varnothing$ sont deux événements incompatibles donc $\mathbb{P}(\varnothing\cup\varnothing) = 2\,\mathbb{P}(\varnothing)$ i.e. $\mathbb{P}(\varnothing) = 0$
(ii). A et $\overline{A}$ étant deux événements incompatibles, on a : $\mathbb{P}(A\cup\overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$ i.e. $\mathbb{P}(\overline{A}) = \mathbb{P}(\Omega) - \mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A)$
(iii). A et B\A étant deux événements incompatibles, on a : $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B\setminus A) \geqslant \mathbb{P}(A)$ (car $\mathbb{P}$ est positive)
(iv). $A\cup B$ est la réunion des événements incompatibles A et $B\setminus(A\cap B)$. Ainsi : $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B\setminus(A\cap B))$. Or B est la réunion des événements incompatibles $B\setminus(A\cap B)$ et $(A\cap B)$, donc $\mathbb{P}(B\setminus(A\cap B)) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A\cap B)$. D'où le résultat annoncé.

Corollaire: Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé (fini). Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille d'événements incompatibles deux à deux. Alors : $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

Dem: On raisonne par récurrence sur le nombre d'événements incompatibles de la famille.

Théorême: Détermination d'une probabilité par les images des singletons.
Soit $\Omega = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un univers fini de cardinal n. Soit $(p_1, \ldots, p_n)$ n réels. Alors :

(i) Il existe une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω telle que $\forall i\in[\![1,n]\!], \mathbb{P}(\{w_i\}) = p_i$ si et seulement si $\forall i\in[\![1,n]\!], p_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

(ii) Le cas échéant, cette probabilité est unique et on a : $\forall A\in\mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}(A) = \sum_{w\in A} \mathbb{P}(\{w\})$

Dem: * Si $\mathbb{P}$ est une probabilité sur Ω vérifiant les conditions, on a $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $p_i = \mathbb{P}(\{w_i\}) \geqslant 0$ car entre 0 et 1. De plus, comme $(\{w_1\}, \{w_2\}, \ldots, \{w_n\})$ est une famille d'événements incompatibles donc la réunion est l'univers des possibles. Donc : $\sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{w_i\}) = 1$

* Si les p_i vérifient $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $p_i \geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. On pose f l'application de Ω vers $[\![1,n]\!]$ définie par $f(w_i) = i$. On pose $\mathbb{P}$ l'application de $\mathcal{P}(\Omega)$ vers $\mathbb{R}$ définie par $\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) = \sum_{w\in A} p_{f(w)} = \sum_{i\in f(A)} p_i$. Puisque les p_i sont positifs, $\mathbb{P}$ est positive et croissante (pour l'inclusion). Ainsi $\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) \in [0, \mathbb{P}(\Omega)] = [0, 1]$ car $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Enfin, si A et B sont deux événements incompatibles, on a $f(A\cup B) = f(A)\cup f(B)$ (les indices des éléments de A étant distincts de ceux de B) et donc $\mathbb{P}(A\cup B) = \sum_{i\in f(A\cup B)} p_i = \sum_{i\in f(A)} p_i + \sum_{i\in f(B)} p_i = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ Ainsi $\mathbb{P}$ est bien une probabilité sur Ω .

* Enfin, si $\mathbb{Q}$ est une loi autre probabilité sur Ω vérifiant $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $\mathbb{Q}(\{w_i\}) = p_i$ alors :
$\forall A\in\mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}\left(\bigcup_{i\in f(A)} \{w_i\}\right) = \sum_{i\in f(A)} \mathbb{Q}(\{w_i\}) = \sum_{i\in f(A)} p_i = \mathbb{P}(A)$: d'où l'unicité de la probabilité $\mathbb{P}$

Exemple: La probabilité uniforme sur l'univers fini Ω, est la probabilité pour laquelle tous les événements élémentaires sont équiprobables i.e. tous les p_i sont égaux (et valent $\frac{1}{|\Omega|}$)

III) Probabilités conditionnelles

Probabilité conditionnelle

On considère un jeu consistant à lancer un dé 2 fois un dé équilibré à 6 faces et on effectue la somme des valeurs tirées. L'univers des tirages est donc $\Omega = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$ et la probabilité est : pour x dans Ω , $\mathbb{P}(\{x\}) = \frac{\inf(x-1, 13-x)}{36}$ (**Exercice** : le montrer)

On considère l'événement A = "on obtient une somme supérieure ou égale à 10".

On suppose que le premier dé a donné un résultat de 3 (événement B). La probabilité d'obtenir alors A est nulle. Par contre si le premier dé a donné un 6 (événement C), alors la probabilité d'obtenir A, sachant cela, est $\frac{1}{2}$ (car il suffit que le second dé donne 4, 5 ou 6). On dit alors que la "probabilité d'avoir A sachant que l'on a B" vaut 0 alors que la probabilité d'avoir A sachant que l'on a C" vaut $\frac{1}{2}$.

Définition: Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit B un événement de probabilité non nulle. Pour tout événement A de Ω, on appelle **probabilité conditionnelle de A sachant B,** le nombre : $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

Propriété: Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit B un événement de probababilité non nulle. Alors l'application $\mathbb{P}_B : \mathcal{P}(\Omega) \mapsto \mathbb{R},\ A \to \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$, est une loi de probabilité

Dem: Puisque pour tout A, $0 \leqslant \mathbb{P}(A\cap B) \leqslant \mathbb{P}(B)$, $\mathbb{P}$ est bien une application d'image dans [0, 1]. De plus, on a clairement $\mathbb{P}_B(\Omega) = 1$ et, si A et A' sont incompatibles, $A\cap B$ et $A'\cap B$ sont également incompatibles et donc :
$\mathbb{P}_B(A\cup A') = \mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(A')$ .. On a bien une probabilité.
Par ailleurs, si $\mathbb{P}(A)$ est non nulle on a : $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$

Exercice 1: On considère une famille de deux enfants (le sexe des bébés est supposé équiprobable).
1) Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons ?
2) Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons sachant que l'ainé est un garçon ?
3) Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons sachant qu'il y a au moins un garçon ?

Propriété: Formule des probabilités composées.
Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit n un entier $n \geqslant 2$.
Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ une famille d'événements vérifiant $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$. Alors :

$$\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n\right) = \mathbb{P}\left(A_1\right) \times \mathbb{P}\left(A_2 | A_1\right) \times \mathbb{P}\left(A_3 | A_1 \cap A_2\right) \times \ldots \times \mathbb{P}\left(A_2 | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right)$$

Dem: On remarque que l'hypothèse $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i\right) \neq 0$ entraine : $0 < \mathbb{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right) \leqslant \ldots \leqslant \mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right) \leqslant \mathbb{P}\left(A_1\right)$

On peut donc écrire : $\mathbb{P}\left(A_1\right) \times \mathbb{P}\left(A_2 | A_1\right) \times \ldots \times \mathbb{P}\left(A_2 | A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right)$

$$= \mathbb{P}\left(A_1\right) \times \frac{\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right)}{\mathbb{P}\left(A_1\right)} \times \frac{\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2 \cap A_3\right)}{\mathbb{P}\left(A_1 \cap A_2\right)} \times \ldots \times \frac{\mathbb{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_n\right)}{\mathbb{P}\left(A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}\right)} = \mathbb{P}\left(A_2 \cap \ldots \cap A_n\right)$$

Exercice 2: Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité que les deux premières boules tirées soient blanches et que la troisième soit noire.

Propriété: Formule des probabilités totales. Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles. Alors : pour tout événement B, on a : $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B | A_i\right) \times \mathbb{P}\left(A_i\right)$

Dem: Comme la famille des $B\cap A_i$ est constituée d'événements incompatibles d'union B, on a :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B\cap A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B | A_i\right) \times \mathbb{P}\left(A_i\right)$$

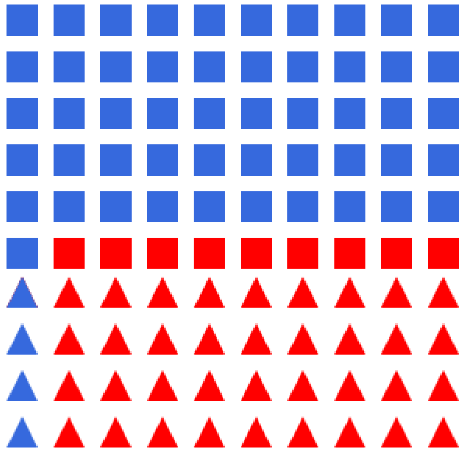
Formules de Bayes

Propriété: Formule de Bayes Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit A et B deux événements de probabilités non nulles. Alors : $\mathbb{P}\left(A | B\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(B | A\right) \times \mathbb{P}\left(A\right)}{\mathbb{P}\left(B\right)}$

Dem: Provient de $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B)$.

Propriété: Formule de Bayes Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \ldots, A_n)$ un système complet d'événements de probabilités non nulles et soit B un événement de probabilité non nulle. Alors : $\forall j \in [\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}\left(A_j | B\right) = \dfrac{\mathbb{P}\left(B | A_j\right) \times \mathbb{P}\left(A_j\right)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(B | A_i\right) \times \mathbb{P}\left(A_i\right)}$

Dem: Provient de la formule de Bayes précédentes et de la formule des probabilités totales



Exercice 3: Une urne contient 100 objets de même taille :

- 60 de formes carrées et 40 de formes triangulaires
- 55 formes bleues et 45 rouges
- 9 carrés sont rouges, 4 triangles sont bleus

1) Une main "innocente" tire un objet :
   Quelle est la probabilité que cela soit un carré ?
2) Une main "innocente" tire un objet et on voit qu'il s'agit d'un objet rouge :
   Quelle est la probabilité que cela soit un carré ?
3) Une main "innocente" tire un objet et sent que c'est un carré :
   Quelle est la probabilité que cela soit une forme rouge ?

Exercice 4: Une caractéristique A concerne 0.1 % d'une population, les individus ne l'ayant pas ont la caractéristique B. Un test permet de détecter cette caractéristique mais avec une petite marge d'erreur :

- Sur les tests portant sur les individus ayant la caractéristique A, le test donnera le résultat A dans 95% des cas et le résultat B dans 5% des cas.
- Sur les tests portant sur les individus ayant la caractéristique B, le test donnera le résultat A dans 4% des cas et le résultat B dans 96% des cas

Un test sur un individu donne le résultat A : Quelle est la probabilité que cet individu ait la caractéristique A ?

IV) Indépendance

Couple d'événements indépendants

Définition: Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements de Ω.
On dit que **A et B sont des événements indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Propriété: Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soient A et B deux événements de Ω avec B de probabilité non nulle. Alors A et B sont deux événements indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.

Dem: Provient de $\mathbb{P}(A\cap B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(A|B)$.

Famille d'événements mutuellement indépendants

Définition: Soit $(\Omega,\mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements de Ω. On dit que **$A_1, A_2 \dots A_n$ sont mutuellement indépendants** si pour toute partie non vide I de $[\![1,n]\!]$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)$

Propriété: Soit $(A_1, \dots, A_n)$ une famille d'événements mutuellement indépendants d'un espace probabilisé fini. Alors $\forall i \neq j$, A_i et A_j sont des événements indépendants.

Dem: On travaille avec la partie $\{i, j\}$ de $[\![1,n]\!]$.

Remarque: On n'a pas la réciproque. On lance 2 pièces non truquées et on note :
A : " la première pièce tombe sur pile " ,
B : " la seconde pièce tombe sur pile " et
C : " les deux pièces tombent du même coté"
Ces trois événements sont 2 à 2 indépendants mais pas mutuellement indépendants